

כלים מתמטיים 96039



תוכן העניינים

1.	מבוא מתמטי לקורס	1
2.	הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות (ללא ספר)	8
3.	הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות	8
4.	נושאים מתקדמים - פונקציות טריגונומטריות	30
5.	וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים	33
6.	וקטורים אלגבריים	54
7.	גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה	83
8.	גיאומטריה אנליטית - ההיפרבולה	93
9.	קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב	99

כלים מתמטיים 96039

פרק 1 - מבוא מתמטי לקורס

תוכן העניינים

1. מבוא לתורת הקבוצות.....1
2. המספרים האי-רציונליים.....7

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y : (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y : (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ (k ו- n טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את 0.

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x .

ג. לכל מספר טבעי n , המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x , $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:

$A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האיזוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב. $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד. $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה. $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה הבאה $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5 \in A$ ב. $2 \in A$ ג. $\{2\} \in A$

ד. $\{2\} \subseteq A$ ה. $\{\{2\}\} \subseteq A$ ו. $\emptyset \in A$

ז. $\emptyset \subseteq A$ ח. $\{2, \{2\}\} \subseteq A$ ט. $\{2, 4\} \subseteq A$

י. $\{2, 4\} \in A$ יא. $\{\{2, 4\}\} \in A$ יב. $\{2, 5\} \subseteq A$

יג. $\{2, 5\} \in A$ יד. $\{1, 4\} \in A$

(7) מצאו שתי קבוצות, A ו- B , המקיימות:

א. $A \in B$

ב. $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$, $C = \{3, 5, 7, 9\}$, $D = \{6, 7, 8\}$, $E = \{7, 8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X :

א. $X \subseteq A$ וגם $X \not\subseteq D$

ב. $X \subseteq D$ וגם $X \not\subseteq C$

ג. $X \subseteq E$ וגם $X \not\subseteq A$

(9) הוכיחו: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

(10) נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את :

א. $A \cup B$

ב. $A \cap B$

ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

(11) נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^x = 0\}$$

רשמו את :

א. $A \cup B$

ב. $A \cap B$

ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

(12) נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשבו את $(A - B) - C$

ב. חשבו את $A - (B - C)$

(13) נתון : $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}, A = \{12, 15, 18\}, B = \{13, 15, 17\}$

הדגימו את כלל דה מורגן $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(14) הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(15) מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות :

א. $A = [1, \infty)$

ב. $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

16 הציגו באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| א. $A \cap B$ | ב. $A \cup B$ |
| ג. A^c | ד. $A \cap B^c$ |
| ה. $A^c \cap B$ | ו. $A \cup B^c$ |
| ז. $A^c \cup B$ | ח. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ |
| ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ | |

17 ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הוכיחו כי $A \setminus B = A \cap B^c$.
הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.
- ב. נסמן: $X = C \setminus (A \cap B)$, $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
הוכיחו כי $X = Y$.
- ג. נסמן: $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
הוכיחו כי $X = Y$.

18 תהיינה X, Y, Z קבוצות כלשהן.

- טענה א': $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$.
- טענה ב': $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$.
- טענה ג': $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup Z$.
- איזו טענה נכונה לכל בחירה של X, Y, Z ?

19 הוכיחו כי אם הנקודה x_1 שייכת לסביבת ε של הנקודה x_0 , אז קיימת סביבת δ של x_1 שמוכלת בסביבת ε של הנקודה x_0 .

20 הוכיחו שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

21 הוכיחו כי אם x_0 לא שייכת לקטע הסגור $[a, b]$, אז קיימת סביבה של הנקודה x_0 אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע $[a, b]$.

22 הוכיחו כי אם $|x - x_0| < \varepsilon$, $|y - y_0| < \varepsilon$, אז $|xy - x_0y_0| < \varepsilon(|x_0| + |y_0| + \varepsilon)$.

תשובות סופיות

- (1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2 > 0$. הטענו אינה נכונה.
 ב. לכל x קיים y , כך ש- $(x+y)^2 > 0$. הטענו אינה נכונה.
 ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz = \frac{y}{4}$. הטענו אינה נכונה.
 ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. הטענו נכונה.
 ה. לכל n טבעי המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6. הטענו נכונה.
- (2) א. $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$. ב. $\forall x: x^2 + 4 > 0$.
 ג. $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$. ד. $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.
- (3) א. $A = (-4, 4)$, בקבוצה אינסוף איברים.
 ב. $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, בקבוצה 7 איברים.
 ג. $C = \{1, 2, 3\}$, בקבוצה 3 איברים. ד. $D = \{-3, -2, -1, 0\}$, בקבוצה 4 איברים.
 ה. $E = \{0, 1\}$, בקבוצה 2 איברים.
 ו. $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, בקבוצה 9 איברים.
- (4) א. $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$. ב. $B = \{11, 13, 17, 19\}$.
 ג. $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. ד. $D = \{1, 4, 9, 16\}$.
- (5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7) $A = \{1, 2\}$ $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א. A, C . ב. E, D . ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{4, 6, 8\}$, $(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$
- (11) $A \cup B = (-2, 4)$, $A \cap B = \emptyset$, $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$, $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$, $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$
- (11) $A \cup B = (-2, 4)$, $A \cap B = \emptyset$, $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$, $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$, $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$
- (11) $A \cup B = (-2, 4)$, $A \cap B = \emptyset$, $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$, $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$, $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$

12) א. ϕ ב. $\{4, 5, 6\}$

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

15) א. $A^c = (-\infty, 1)$ ב. $B^c = [1, 4]$ ג. $C^c = [1, 4]$

ד. $D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4]$

16) ראו בסרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענו ב.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

המספרים האי-רציונליים

שאלות

- (1) א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
- (2) א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכיחו שהמספר מתחלק ב-3.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.
- (3) א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
- (4) הוכיחו כי $\sqrt{n}$ הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- n טבעי שאינו ריבוע של מספר).
- (5) הוכיחו או הפריכו:
א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.
ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.
- (6) א. הוכיחו כי $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ג. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.
- (7) א. יהי p מספר ראשוני ויהיו a, k מספרים טבעיים.
הוכיחו כי $p \mid a \Leftrightarrow p \mid a^k$.
ב. הוכיחו: אם $n \neq N^k$, אז $\sqrt[k]{n}$ הוא מספר אי-רציונלי ($n, k, N \in \mathbb{N}$).

הערת סימון: אם מספר a מתחלק במספר b נסמן $b \mid a$,
ונאמר גם " b מחלק את a ".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

כלים מתמטיים 96039

פרק 2 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות (ללא ספר)
9. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות (ללא ספר)
10. הפונקציות ההיפרבוליות (ללא ספר)
11. הצגה פרמטרית של פונקציה (ללא ספר)
12. הצגה פולרית של עקום (ללא ספר)

כלים מתמטיים 96039

פרק 3 - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

תוכן העניינים

8	1. תחום הגדרה של פונקציה
10	2. הרכבת פונקציות
13	3. הפונקציה ההפוכה
17	4. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית
22	5. פונקציה מחזורית
25	6. פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית
26	7. תרגילים משולבים

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad (3)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = \tan(10x) \quad (14)$$

$$y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18)$$

$$y = \arcsin(x-4) \quad (17)$$

תשובות סופיות

(1) כל x .

(2) $x \neq \pm 2$

(3) כל x .

(4) $x \neq 0, 1, -1$

(5) $x \neq 2, -1$

(6) $x \geq 4$

(7) $x \leq -2, x \geq 1$

(8) כל x .

(9) $-1 < x < 1$

(10) $x < -2, x > 1$

(11) $x > 0, x \neq 1$

(12) כל x .

(13) $x > 0, x \neq 1$

(14) $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

(15) $x \neq \frac{\pi k}{4}$

(16) כל x .

(17) $3 < x < 5$

(18) $-2 < x < 0$

הרכבת פונקציות

שאלות

1) נתונות הפונקציות הבאות: $h(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$
 ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

2) נתון: $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו $f(f(x))$ עבור $x = 3$.

3) נתון: $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$, $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו $f(g(x)) + g(f(x))$ עבור $x = 8$.

4) נתון: $f(x) = x^2 - 7x$, $g(x) = \ln x$

חשבו $f(g(x))$ עבור $x = e^2$.

5) נתון: $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \ln x$

חשבו $f(g(x))$ עבור $x = 2$.

6) נתון: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשבו $f(g(x))$, $g(f(x))$

7) נתונות הפונקציות:

$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$ ו- $g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x) = g(f(x))$.

(8) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x) = f(g(x))$.ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$ ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

$$1. n \leq -3$$

$$2. n \geq 1$$

3. n אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

$$(9) \quad \text{נתון} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ times}}$$

מצא את

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad \frac{69}{13}$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$(6) \quad f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(7) \quad z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(8) \quad \text{א. } -\sqrt{3} \leq x < 1 \quad \text{ב. } n \leq -3 \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(9) \quad f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בתרגילים 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בתרגילים 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בתרגילים 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}.$$

האם הפונקציה היא חח"ע?
מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad \text{א. } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad \text{ב. } f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad \text{ג. } f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$f(x) = x^2 - 4 \quad \text{ד. } f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

13 עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

א. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ב. $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$ $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ג. $f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1]$ $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

14 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, ותהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם f ו- g חח"ע, אז h חח"ע.

ב. אם f ו- g חח"ע, אז h על.

ג. אם f ו- g על, אז h על.

ד. אם f ו- g על, אז h חח"ע.

ה. אם f חח"ע ו- g על, אז h חח"ע.

ו. אם f חח"ע ו- g על, אז h על.

ז. אם f על ו- g חח"ע, אז h חח"ע.

ח. אם f על ו- g חח"ע, אז h על.

15 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, ותהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. נתון כי h על. הוכיחו או הפריכו:

א. f חח"ע.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. g על.

- 16)** תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, ותהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. נתון כי h חח"ע. הוכיחו או הפריכו:
- א. g על.
 - ב. f על.
 - ג. g חח"ע.
 - ד. f חח"ע.

תשובות סופיות

- (1) $f^{-1}(x) = 3x + 1$, כל y .
- (2) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$, $y \neq 1$.
- (3) $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$, $y \neq 3$.
- (4) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$, $y \geq -4$.
- (5) לא חח"ע. תמונה: $y \leq -2$ או $y \geq 2$.
- (6) לא חח"ע. תמונה: $y \geq -\frac{1}{4}$.
- (7) לא חח"ע. תמונה $0 \leq y \leq 1$.
- (8) כן חח"ע. תמונה: $y > 0$. פונקציה הפוכה: $x > 0$, $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
- (9) לא חח"ע. תמונה: $y \geq 2.3$ או $y \leq -1.3$.
- (10) כן חח"ע. תמונה: $y \neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$.
- (11) לא חח"ע. תמונה: $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$.
- (12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: $\mathbb{R}$; על.
 ב. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; לא על.
 ג. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; על.
 ד. תחום הגדרה $[0, \infty)$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $[-4, \infty)$; לא על.
- (13) א. תחום הגדרה וטווח: $\mathbb{R}$, תמונה: $(0, 1]$; לא על.
 ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}$, טווח ותמונה: $(0, 1]$; על.
 ג. תחום הגדרה $(1, \infty]$, טווח $(0, 1]$, תמונה: $(0, 0.5)$; לא על.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.

פונקציה זוגית ואי זוגית

שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות 1-8 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$(1) \quad y = 4x^3 \quad (2) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (3) \quad y = 1$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x} \quad (5) \quad y = x^2 + \sin^2 x \quad (6) \quad y = 2^x$$

$$(7) \quad y = \ln x + x^2 \quad (8) \quad y = \sin x \cdot \cos x$$

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } z(x) = f(x^2), \quad k(x) = -f(x).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ופונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.

טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(11) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ונתונה פונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|), \quad z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(12) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$ ומקיימת $|f(x)| < 1$.

נתון כי $g(x)$ פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.

$$\text{הוכיחו שהפונקציה } z(x) = g(x) \ln \left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) \text{ היא אי-זוגית ב- } \mathbb{R}.$$

(13) הוכיחו כי :

- א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
- ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

(14) הוכיחו כי :

- א. סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.
- ב. מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.
- ו. הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.
- ז. הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל x היא פונקציית האפס.

(15) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

- נגדיר $z(x) = (f(x))^n$ כאשר $n > 1$ טבעי.
קבעו האם הפונקציה z היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

(16) נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x .

$$f_{\text{odd}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_{\text{even}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{נגדיר:}$$

- א. הוכיחו כי $f_{\text{odd}}(x)$ היא פונקציה אי-זוגית ו- $f_{\text{even}}(x)$ היא פונקציה זוגית.
- ב. הוכיחו כי $f(x) = f_{\text{odd}}(x) + f_{\text{even}}(x)$ והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.
- ג. הציגו את הפונקציה $f(x) = x^2 + x + 1$ כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

(17) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

- א. אם f פונקציה אי-זוגית אז $f(0) = 0$.
- ב. אם f פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב- $x = 0$ אז $f(0) = 0$.

(18) הוכיחו את הטענות הבאות :

- א. הפונקציה $f(x) = \cos x$ היא זוגית.
- ב. הפונקציה $f(x) = \sin x$ היא אי-זוגית.
- ג. הפונקציה $f(x) = \tan x$ היא אי-זוגית.
- ד. הפונקציה $f(x) = \cot x$ היא אי-זוגית.

(19) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע

$$(-a, a) \quad (a > 0).$$

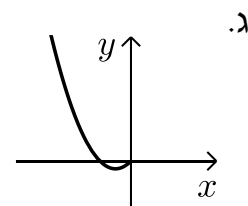
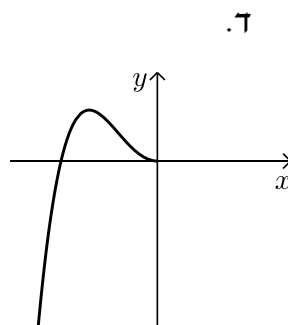
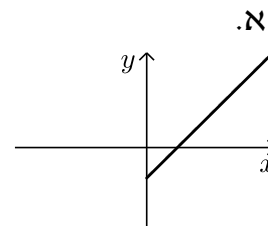
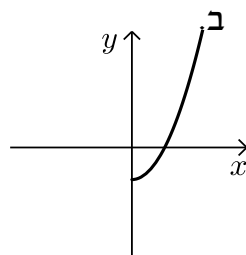
הוכיחו כי גם f^{-1} פונקציה אי-זוגית.

(20) הוכיחו שהפונקציות הבאות הן אי זוגיות :

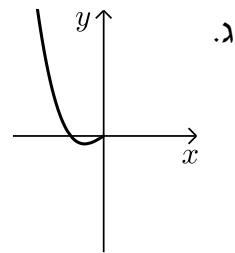
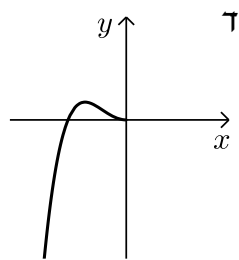
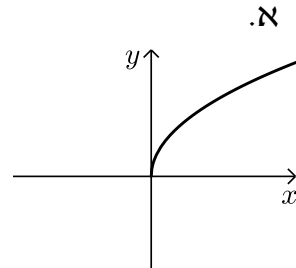
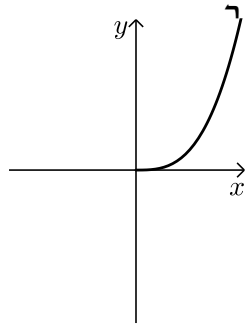
א. $y = \arctan x$

ב. $y = \arcsin x$

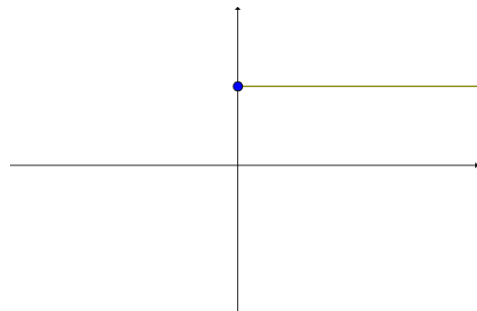
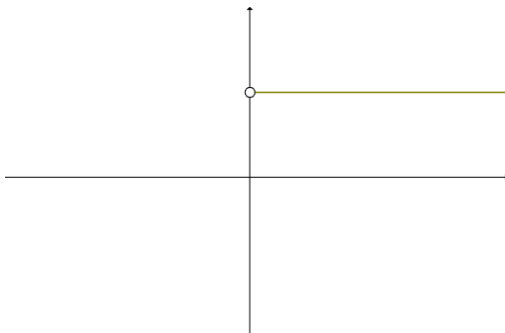
(21) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית :



22 הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x .
 השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



23 השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.



תשובות סופיות

שאלות 1-8 : זוגית : 2,3,5,8 ; אי-זוגית : 1,4 ; כללית : 6,7.

(9) k אי-זוגית, z זוגית.

(10) טענה ב'.

(11) k אי-זוגית, z זוגית.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) כאשר n זוגי – זוגית, וכאשר n אי-זוגי – אי-זוגית.

(16) א.ב. שאלת הוכחה. ג. $f(x) = \underbrace{x}_{\text{odd}} + \underbrace{x^2 + 1}_{\text{even}}$

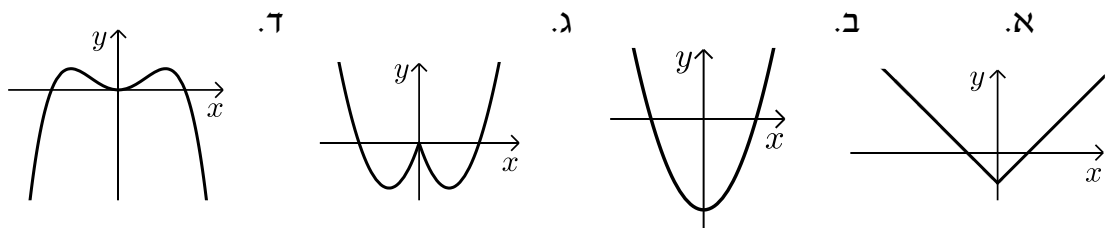
(17) שאלת הוכחה.

(18) שאלת הוכחה.

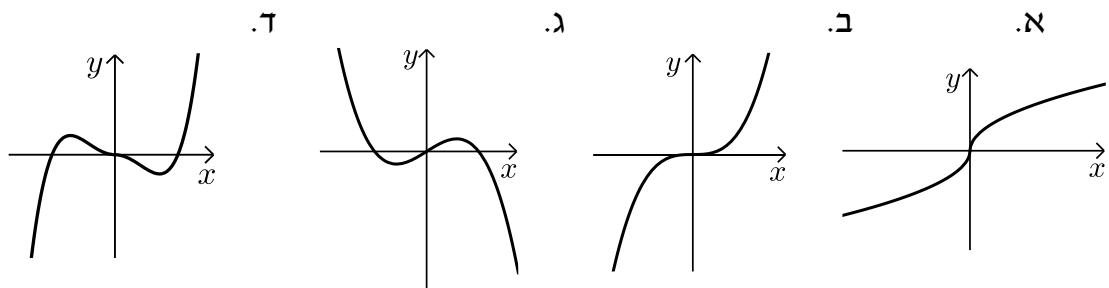
(19) שאלת הוכחה.

(20) שאלת הוכחה.

(21) להלן הגרפים :



(22) להלן הגרפים :



(23) ראו בסרטון.

פונקציה מחזורית

שאלות

מצאו את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-20 :

$$y = 1 + 14 \cos 20x \quad (2) \qquad y = 1 + 10 \sin(0.5x + 4) \quad (1)$$

$$y = -1 + 14 \sec 2x \quad (4) \qquad y = -4 + 20 \tan 4x \quad (3)$$

$$y = \cos^2 2x \quad (6) \qquad y = \sin^2 4x \quad (5)$$

$$y = (\sin x + \cos x)^2 \quad (8) \qquad y = \cos^4 x - \sin^4 x \quad (7)$$

$$y = \cot^2 x \quad (10) \qquad y = \cos^4 x + \sin^4 x \quad (9)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x \quad (12) \qquad y = \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{10} \quad (11)$$

$$y = \cos 2x \cos x \quad (14) \qquad y = \sin 4x + \sin 14x + \sin x \quad (13)$$

$$y = \sin^4 x \quad (16) \qquad y = \sin^3 x \quad (15)$$

$$y = |\sin x| \quad (18) \qquad y = \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} \quad (17)$$

$$y = \cot x - \tan x \quad (20) \qquad y = \sin^2 x + \cos^2 x \quad (19)$$

הוכיחו שהפונקציות בשאלות 21-26 אינן מחזוריות :

$$y = x \sin x \quad (23) \qquad y = x + \cos x \quad (22) \qquad y = x + \sin x \quad (21)$$

$$y = \cos 5x + \cos \sqrt{5x} \quad (26) \qquad y = \frac{\sin x}{x} \quad (25) \qquad y = x^2 \cos x \quad (24)$$

הערה : בשאלות 21 ו-22 נדרש ידע בחקירת פונקציה.

(27) הוכיחו :

אם $f(x)$ מחזורית בעלת מחזור p ,

אז $y = a + b \cdot f(cx + d)$ מחזורית בעלת מחזור $\frac{p}{c}$.

(28) הוכיחו : אם T הוא מחזור של $f(x)$, אז לכל n שלם $f(x + nT) = f(x)$.

(29) נתון כי f, g מוגדרות לכל x ובעלת מחזור p_1, p_2 , בהתאמה.

נתון כי היחס $\frac{p_1}{p_2}$ הוא מספר רציונלי.

הוכיחו כי גם הפונקציות $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) הן מחזוריות.

(30) נתונה הפונקציה $f(x) = x - [x]$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?

ג. הוכיחו את התשובה בסעיף ב.

(31) נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0,1]$.

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ בקטע $[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור f .

(32) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0,1]$.

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ ב- $[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור g .

תשובות סופיות

- (1) 4π (2) $\frac{\pi}{10}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π (5) $\frac{\pi}{4}$
- (6) $\frac{\pi}{2}$ (7) π (8) π (9) $\frac{\pi}{2}$ (10) π
- (11) 40π (12) π (13) 2π (14) 2π (15) 2π
- (16) π (17) π (18) π

(19) הפונקציה היא למעשה $y = 1$, כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית.
כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

(20) $\frac{\pi}{2}$

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

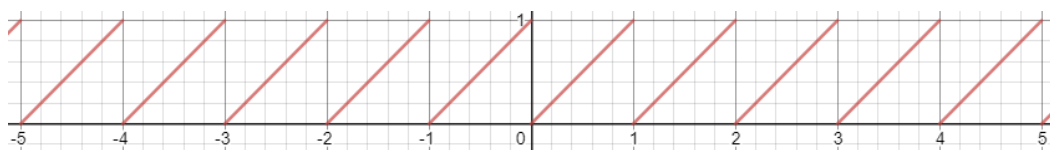
(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

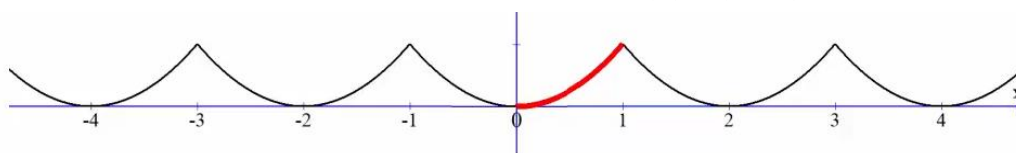
(30) א.



ב. 1 ג. שאלת הוכחה.

(31) $g(x) = x - k$, עבור k שלם, זוגי.

(32) $g(x) = (x - k)^2$, עבור k שלם, זוגי.



פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית

שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשבו $f(1)$, $f(4)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(7)$.

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

תשובות סופיות

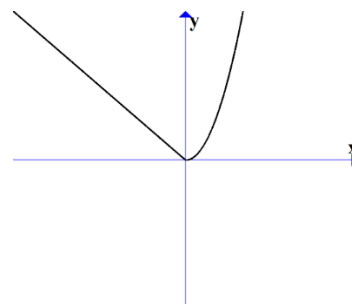
$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

(5) א. $f(1)=1$, $f(4)=16$, $f(-4)=4$, $f(0)=0$, $f(7)=\text{undefind}$
 ב. ג. כללית.



תרגילים משולבים

שאלות

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על $\mathbb{R}$.

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על $\mathbb{R}$.

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ג': $h(x) = k(x)z(x)$ זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות, $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$.

נתון ש- f מונוטונית עולה ממש, ואילו g מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

איזו טענה נכונה?

א. h יורדת חלש.

ב. h עולה ממש.

ג. h עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד. h אינה חסומה בהכרח.

$$(5) \text{ נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

א. מצאו את h בקטע $[-2,0)$.

ב. קבעו האם h חח"ע בקטע $[-2,0)$.

ג. קבעו האם h חסומה בקטע $[-2,0)$.

ד. קבעו האם $h: [-2,0) \rightarrow [0,4]$ היא על.

* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

(6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x) = x^3$, $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.

קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

$$\text{הפונקציה } h(x) = f(g(x)) \text{ היא:}$$

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x) = x^3$, $g(x) = -\lfloor x \rfloor$.

א. בדקו את מונוטוניות $z(x) = f(g(x))$.

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x) = g(f(x))$.

ג. בדקו האם $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$, אז הפונקציה f יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$,
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה g עולה ממש וחח"ע.

9 מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

וקבעו את תחום הגדרתה.

הוכיחו שהפונקציה על $\mathbb{R}$.

הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א. $h(x) = x^2$ ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש. ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; תחום הגדרתה : כל x .
- (10) ראו באתר.
- (11) א. $-1 \leq x \leq 2$ ב. $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$ ג. שאלת הוכחה.
- ד. $-1 \leq x < \frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2} < x \leq 2$ ירידה.

כלים מתמטיים 96039

פרק 4 - נושאים מתקדמים - פונקציות טריגונומטריות

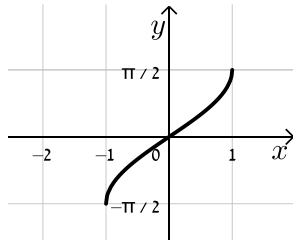
תוכן העניינים

1. נושאים מתקדמים - פונקציות טריגונומטריות 30

נושאים מתקדמים – פונקציות טריגונומטריות

סיכום כללי

הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות

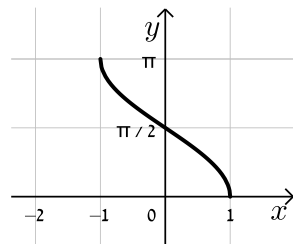


תיאור גרפי של הפונקציה $f(x) = \arcsin(x)$:

סימון נוסף: $f(x) = \sin^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-1 \leq x \leq 1$.

טווח: $-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$.

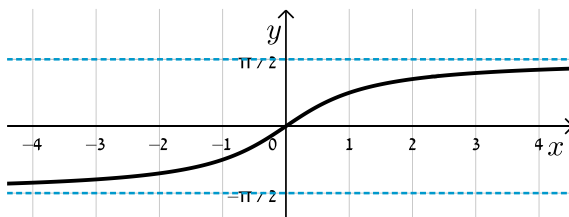


תיאור גרפי של הפונקציה $f(x) = \arccos(x)$:

סימון נוסף: $f(x) = \cos^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-1 \leq x \leq 1$.

טווח: $0 \leq f(x) \leq \pi$.

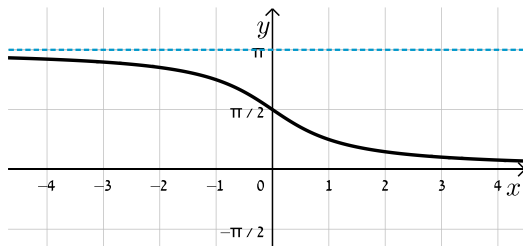


תיאור גרפי של הפונקציה $f(x) = \arctan(x)$:

סימון נוסף: $f(x) = \tan^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-\infty < x < \infty$.

טווח: $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$.



תיאור גרפי של הפונקציה $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$:

סימון נוסף: $f(x) = \cot^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-\infty < x < \infty$.

טווח: $0 < f(x) < \pi$.

קשרים בין הפונקציות הטריגונומטריות להפוכות

עבור הפונקציות הטריגונומטריות, שאינן חח"ע, נקבל את הקשרים הבאים:

הפונקציה	הזהות
סינוס	$\sin(\sin^{-1}(x)) = x \quad -1 \leq x \leq 1$
	$\sin^{-1}(\sin(x)) = \begin{cases} x - 2\pi k & -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi(k+1) - x & \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$
קוסינוס	$\cos(\cos^{-1}(x)) = x \quad -1 \leq x \leq 1$
	$\cos^{-1}(\cos(x)) = \begin{cases} x - 2\pi k & 2\pi k \leq x \leq \pi(1+2k) \\ 2\pi k - x & \pi(1+2k) \leq x \leq 2\pi(k+1) \end{cases}$
טנגנס	$\tan(\tan^{-1}(x)) = x \quad -\infty < x < \infty$
	$\tan^{-1}(\tan(x)) = x - \pi k \quad -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$
קוטנגנס	$\cot(\cot^{-1}(x)) = x \quad -\infty < x < \infty$
	$\cot^{-1}(\cot(x)) = x - \pi k \quad \pi k < x < \pi + \pi k$

שאלות

בשאלות 1-12 חשבו ללא מחשבון:

- | | |
|---|---|
| $\arccos(-1)$ (2) | $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (1) |
| $\arctan(-\sqrt{3})$ (4) | $\operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (3) |
| $\arcsin(-0.5)$ (6) | $\arccos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (5) |
| $\sin(\arcsin(-0.5))$ (8) | $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ (7) |
| $\cos(\operatorname{arccot}(1))$ (10) | $\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ (9) |
| $\tan(-\operatorname{arccot}(\sqrt{3}))$ (12) | $\sin(2 \arctan(\sqrt{3}))$ (11) |

בשאלות 13-15 מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות :

$$y = \arccos \frac{x+3}{2x+1} \quad (14)$$

$$y = \arcsin \frac{2x+1}{3-3x} \quad (13)$$

$$y = \arctan \frac{1}{1-\ln x} \quad (15)$$

בשאלות 16-19, הוכיחו כי לכל x מתחום ההגדרה מתקיים :

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

$$\sin(2 \arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2} \quad (17)$$

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} \quad (18)$$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0 \quad (19)$$

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi \quad (20) \text{ הראו את הקשר}$$

תשובות סופיות

$-\frac{\pi}{3} \quad (4)$	$\frac{\pi}{3} \quad (3)$	$\pi \quad (2)$	$-\frac{\pi}{4} \quad (1)$
$-\frac{1}{2} \quad (8)$	$-\frac{\pi}{6} \quad (7)$	$-\frac{\pi}{6} \quad (6)$	$\phi \quad (5)$
$-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (12)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (11)$	$1 \quad (10)$	$\frac{1}{2} \quad (9)$
$x > 0, x \neq e \quad (15)$	$x \leq -\frac{4}{3}, x \geq 2 \quad (14)$	$x \leq \frac{2}{5}, x \geq 4 \quad (13)$	

(16) - (20) שאלות הוכחה.

כלים מתמטיים 96039

פרק 5 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

תוכן העניינים

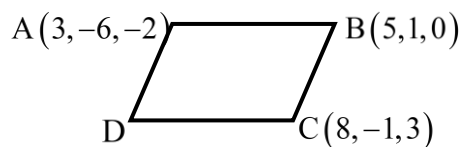
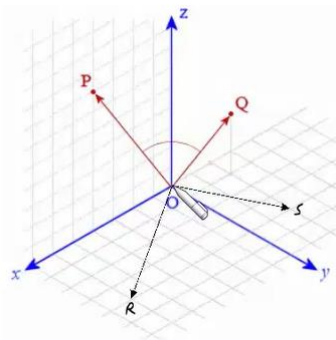
1. וקטורים 33
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת 40
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב 42
4. פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי 43
5. גרדינט, דיברגנץ ורוטור 52

וקטורים

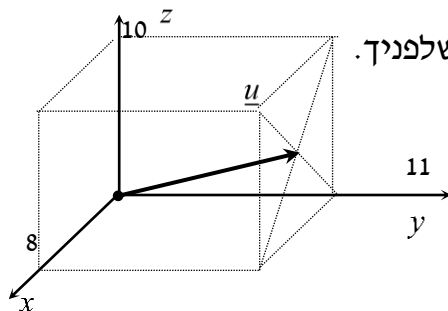
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\vec{u}$, $\vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

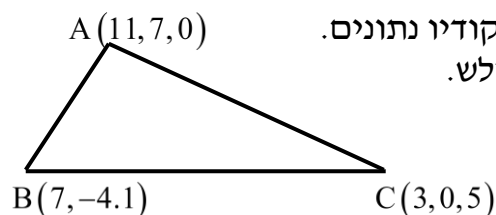
- (1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$ שבאיור.
הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצאו את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



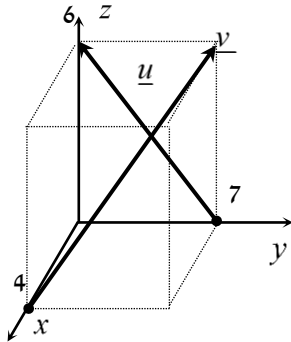
- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2, 0, -3)$ ו- $F(7, -1, -3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N , אם נתונה הנקודה $M(0, -4, 1)$

והווקטור $\overrightarrow{MN} = (-1, -1, 9)$.



(6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.

(7) מצאו את x , y ו- z , אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$ כאשר $\underline{u} = (4, -1, 2)$,

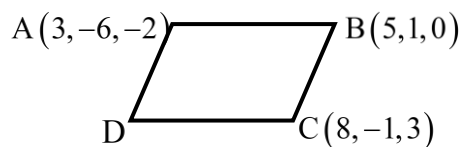
$\underline{v} = (z - 2, y + 1, x - 3)$.

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1, 0, 2)$, $B(3, 7, -4)$, $C(6, 9, 0)$, $D(7, 4, 10)$, $E(9, 11, 4)$

א. הראו כי $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$? נמקו.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

שיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצאו את שיעורי הקדקוד D .

* אין להיעזרו בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים $\underline{u} = (-3, 1, 4)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$ ו- $\underline{w} = (2, 6, -5)$.
 * בשאלות 13, 14, ו-16 הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשבו:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשבו:

א. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12) $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13) $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14) $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15) $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16) $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$, ויש למצוא את הווקטורים:

(17) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

(18) $2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$

(19) $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:

$A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$.

הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

(21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :

$$A(1, 2, 0), B(-2, 5, 3), C(-1, 8, 4), D(4, 3, -1)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

(22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5), \underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1), \underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3), \underline{v} = (4, -2, -6)$

(23) מצאו את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם :

$$A(-3, 2, 1), B(0, 3, 2), C(5, -1, 0)$$

(24) נתונים הווקטורים $\underline{u} = (2, -1, 0), \underline{v} = (5, 0, 3)$.

מצאו וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0,

אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

(25) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3, 2, 1)$ ו- $(1, -1, 2)$,

ושמרחקו מהווקטור $(1, 1, 0)$ הוא $\sqrt{3}$.

(26) ענו על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}|$.

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2$.

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

(27) הוכיחו :

א. $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ב. $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ג. $(\underline{u} - \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) = |\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2$

ד. $|\underline{u} + \underline{v}|^2 + |\underline{u} - \underline{v}|^2 = 2|\underline{u}|^2 + 2|\underline{v}|^2$

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. $\frac{1}{4}(|\underline{u} + \underline{v}|^2 - |\underline{u} - \underline{v}|^2) = \underline{u} \cdot \underline{v}$

(28) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה. נגדיר $a = u - 2v$, $b = 3u + v$.
 אם α היא הזווית בין a ל- b , אז $\cos \alpha$ שווה ל-?

(29) יהיו $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k .
 יהי $v = \alpha w_1 + \frac{3}{4} w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1 .
 מהו המרחק של v מ- w_1 ?

(30) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u - v\| = 2$.
 הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \vec{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left(\frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad (22)$$

$$S_{\triangle ABC} = 10.173 \quad \text{יח"ש.} \quad (23)$$

$$(-3, -6, 5) \quad (24)$$

$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{or} \quad v = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (25)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (26)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{50}} \quad (28)$$

$$(29) \quad \frac{5}{4}k$$

(30) שאלת הוכחה.

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

(1) נתון: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
חשבו: $(u \times v) \times w$.

(2) חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $A = (8, 2, 3)$, $B(4, -1, 2)$, $C(-8, 0, 4)$.

(3) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.
ידוע כי $|u| \neq 0$, $u \times v = 0$, $u \cdot w = 0$,
הוכיחו כי $v \cdot w = 0$.

(4) נתונים שני וקטורים u, v במרחב.
ידוע כי $|v| = 4$, $|u| = 1$, $u \perp v$
חשבו $|(u+v) \times (u-v)|$.

(5) נתון $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$
חשבו:

א. $u \cdot (v \times w)$ ב. $v \cdot (w \times u)$ ג. $(u \times v) \cdot w$

(6) חשבו את נפח:

א. המקבילון שקדקודיו $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(3, 0, 2)$, $D(4, 1, 1)$.

ב. הפירמידה שקדקודה $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(3, 0, 2)$, $D(4, 1, 1)$.

(7) חשבו את נפח הפירמידה שקדקודה $A(2, 2, 5)$, $B(1, -1, -4)$, $C(3, 3, 10)$, $D(8, 6, 3)$.

(8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים a, b, c .
 הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $a, a-b, a+b-4c$,
 שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

(9) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.
 הוכיחו כי $[(u+v) \times (v+w)](u+w) = 2w \cdot (u \times v)$.

(10) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.

$$u \cdot (v \times w) = 4$$

חשבו:

$$\text{א. } u \cdot (w \times v) \quad \text{ב. } (v \times w) \cdot u \quad \text{ג. } w \cdot (u \times v) \quad \text{ד. } v \cdot (u \times w)$$

(11) נתונים שלושה וקטורים a, b, c במרחב.

מהי הנוסחה עבור $a \times b \times c$?

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$S = 22.5 \quad (2)$$

(3) שאלת הוכחה.

$$8 \quad (4)$$

$$\text{א. } -3 \quad \text{ב. } -3 \quad \text{ג. } -3 \quad (5)$$

$$\text{א. } 6 \quad \text{ב. } 1 \quad (6)$$

$$9\frac{1}{3} \quad (7)$$

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

$$\text{א. } -4 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } 4 \quad \text{ד. } 4 \quad (10)$$

(11) אין לו נוסחה.

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

- (1) הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
 $A = (1, 2, 1)$, $B(1, 1, 1)$, $C = (2, 1, 2)$, $D(2, 2, 2)$

- (2) מצאו את מרחק הנקודה $A(3, -2, 1)$ מהישר $L: (-10, 8, -8) + t(2, -1, 2)$.

- (3) נתונים שני ישרים:

$$L_1: \frac{x-2}{2} = 3-y = \frac{z-4}{3}, \quad L_2: x+7 = y-5, z=3$$

- א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.
 ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.

- (2) $\sqrt{26}$

- (3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את תחום ההגדרה של $r(t)$ ואת הווקטור $r(t_0)$,

$$\text{כאשר } r(t) = (\cos \pi t, -\ln t, \sqrt{t-2}) \text{ ו- } t_0 = 4.$$

ב. רשמו את המשוואות הפרמטריות $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \cos^2 t$ כפונקציה וקטורית.

ג. רשמו את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה) הווקטורית $r(t) = (t, t^2, t^3)$.

(2) רשמו את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

$$\begin{cases} -x + y - z + 1 = 0 \\ 4x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. } 9x^2 + 4y^2 = 36 \quad (\text{במישור } xy)$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = y + 2 \end{cases} \quad \text{ד.} \quad \begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} z = x^2 + 4y^2 \\ z = 2x \end{cases} \quad \text{ו.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = x^2 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

(3) נתונה פונקציה וקטורית $r(t) = (21t^2, 21t^2 - 1, 10e^t)$.

בסעיפים א-ג, חשבו:

$$\text{א. } \lim_{t \rightarrow 1} r(t)$$

$$\text{ב. } r'(t)$$

$$\text{ג. } \int_0^1 r(t) dt$$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב- $t=1$?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

(4) נתונה: $r(t) = (\cos 4t, \sin 4t, t^4)$.

א. חשבו: $\frac{dr}{dt}$, $\left| \frac{dr}{dt} \right|$, $\frac{d|r'|}{dt}$.

ב. הוכיחו שהפונקציה מסעיף א' חלקה.

(5) נתונה הפונקציה הווקטורית $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$.

א. גזרו את הפונקציה.

ב. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$ ב- $t = 0$.

ג. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $\begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases}$ בנקודה $A(1,1,1)$.

ד. מצאו משיק יחידה לפונקציה הווקטורית $r(t) = (\sin t, e^{2t}, t^2)$ ב- $t = 0$.

(6) נתונה העקומה $r(t) = (t^2, t, 5)$.

א. מצאו נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור

$$x - 6y + 4z - 3 = 0$$

ב. מצאו משוואה של המישור, הניצב לעקומה $r(t) = (3\sin t, -2\cos t, t)$ ב- $t = 0.5\pi$.

$$t = 0.5\pi$$

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

(7) נתון $r(t) = (3\sin t, 3\cos t, 4t)$.

חשבו את משיק היחידה (T), נורמל היחידה (N) והבינורמל (B) של r.

(8) תהי $r(t)$ פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכיחו שאם $|r(t)|$ קבוע לכל t, אז $r(t) \cdot r'(t) = 0$.

כלומר, $r(t)$ ו- $r'(t)$ ניצבים זה לזה.

ב. הוכיחו שנורמל היחידה $N(t)$, ניצב למשיק היחידה $T(t)$.

(9) נתונה פונקציה וקטורית $r(t) = (t, t^2, t^3)$.

מצאו את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק,

המתאימים ל- $t = 2$.

10 נתון $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית,

הוכיחו כי $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

11 חלקיק נע לאורך עקום מרחבי $x = t^3 + 2t$, $y = -3e^{-2t}$, $z = 2\sin 5t$

עבור החלקיק, בזמן $t = 0$, חשבו את:

א. המהירות.

ב. גודל המהירות.

ג. התאוצה.

ד. גודל התאוצה.

ה. הזווית בין וקטורי המהירות והתאוצה.

12 נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\vec{k}$

כאשר $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = (v_{01}, v_{02}, v_{03})$ המהירות ההתחלתית.

מצאו את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

13 חלקיק נע על העקומה $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$.

א. חשבו את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע t .

ב. שרטטו את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע $t = 0.25\pi$, כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.

ג. הראו שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

14 מהירות $v(t)$ של חלקיק נתונה על ידי $v(t) = (2, -1, -10t)$.

ברגע $t = 0$, החלקיק נמצא בנקודה $r(0) = (0, 0, 100)$.

מצאו את משוואת התנועה של החלקיק $r = r(t)$.

15 תאוצה $a(t)$ של חלקיק, נתונה על ידי $a(t) = (18\cos 3t, -18\sin 3t, 0)$.

ברגע $t = 0$ החלקיק נמצא בנקודה $r(0) = (2, 0, 1)$ (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי)

ובמהירות $v(0) = (0, 2, 4)$.

מצאו את משוואת התנועה של החלקיק $r = r(t)$.

16 וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t) = (2t^2 - 5t + 3, t - 5, t^2 - 3)$. עבור איזה ערך של t גודל המהירות של החלקיק יהיה מינימאלי ומהו גודל המהירות המינימאלי של החלקיק.

17 ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הנקודה על המסלול $r(t) = (t^2 - 5t)\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$ שבה וקטורי המהירות והתאוצה ניצבים זה לזה.

ב. וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j}$. הראו שהזווית בין $v(t)$ ו- $a(t)$ קבועה ומצאו את הזווית הזו.

18 הוכיחו: אם המהירות של חלקיק קבועה בגודלה אז וקטורי המהירות והתאוצה שלו ניצבים זה לזה.

19 חשבו את העקמומיות ורדיוס העקמומיות של העקום $r(t) = (t^2, 0, t)$.

20 וקטור המהירות של חלקיק נתון על ידי $v(t) = (2, -1, -10t)$. מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (המצב) של החלקיק ברגע $t = 1$.

21 וקטור התאוצה של חלקיק נתון על ידי $a(t) = (8 \cos 4t, 8 \sin 4t, 0)$. ברגע $t = 0$ החלקיק נמצא במהירות $v(0) = (0, 2, 4)$. מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (וקטור המצב) של החלקיק ברגע $t = \frac{\pi}{4}$.

22 העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה (a, b) ורדיוס R .
 א. מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום C .
 ב. הוכיחו שמעגל העקמומיות של העקום מתלכד עם העקום.
 כלומר, הוכיחו שמרכזו של מעגל העקמומיות הוא (a, b) ורדיוס R .

23 נתון העקום $r(t) = (4 \cos t, 3 \sin t)$ כאשר $0 \leq t \leq 2\pi$.
 באילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מקסימלית ובאילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מינימלית. באילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מקסימלי ובאילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מינימלי. מצאו את מעגלי העקמומיות בנקודות לעיל. הדגימו את כל התוצאות באיור.

(24) נתון העקום $r(\theta) = (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta)$.

הוכיחו שבכל נקודה על העקום רדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

(25) נתונה עקומה במרחב דו-ממדי, שהיא גרף של פונקציה $y = f(x)$.

הראו שהעקמומיות היא
$$\kappa(x) = \frac{|y''(x)|}{\left(1 + (y'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

(26) נתון העקום $y = \frac{1}{x}$.

- א. מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום.
- ב. מצאו על העקום את הנקודה בה רדיוס העקמומיות מינימלי. מהו רדיוס זה?
- ג. מצאו את מעגל העקמומיות שמתאים לנקודה שנמצאה בסעיף ב.

(27) מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום $x^4 + y^4 = 2$ בנקודה $(1,1)$. הדגימו באיור את התוצאה שקיבלת. מהו מרכז העקמומיות ומהי משוואת מעגל העקמומיות בנקודה הנ"ל?

(28) נתונה הפרבולה $y^2 = 8x$.

- א. מצאו את הנקודות על הפרבולה בהן רדיוס העקמומיות שווה ל- $\frac{125}{16}$.
- ב. מצאו את מעגל העקמומיות עבור הנקודה ברביע הראשון שנמצאה בסעיף א'.

(29) העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה (a,b) ורדיוס R. מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום.

(30) נתון העקום $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$ בנקודה $\theta = \pi/6$:

- א. חשבו את רדיוס העקמומיות.
- ב. מצאו את משוואת מעגל העקמומיות/נישוק.
- ג. הוכיחו שרדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

(31) עקומה מישורית מיוצגת על ידי $r(t) = (x(t), y(t))$.

$$\kappa(t) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$$

הראו שהעקמומיות היא

(32) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את רדיוס העקמומיות של $x = a \cos t, y = b \sin t$ ב- $t = 0$

וב- $t = \pi/2$.

ב. הציבו $a = 3, b = 2$ ותנו פירוש גיאומטרי לתוצאה מסעיף א.

במיוחד מצאו את מרכז העקמומיות ושרטטו את מעגלי העקמומיות.

(33) הראו שהעקמומיות של עקומה הנתונה על ידי הצגה קוטבית $r = f(\theta)$ היא

$$k(\theta) = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - r \cdot r''|}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}$$

(34) חשבו את העקמומיות של $r = 2 \sin \theta$ עבור $\theta = \pi/6$.

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

(35) חשבו את רדיוס העקמומיות של $r = 1 + \cos \theta$ עבור $\theta = \pi/2$.

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

במיוחד מצאו את מעגל העקמומיות ואת מרכז העקמומיות.

תשובות סופיות

$$r(4) = (\cos 4\pi, -\ln 4, \sqrt{2}) \quad \text{א. } 0 < t \leq 4 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \text{ג. } x = t, y = t^2, z = t^3 \\ & x = 2t - 0.5, y = 3t - 1.5, z = t \\ & r(t) = (2t - 0.5, 3t - 1.5, t) \quad \text{ב.} \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \text{ב. } r(t) = (\sin t, \cos t, \cos^2 t) \\ & x = 2 \cos t, y = 3 \sin t \\ & r(t) = (2 \cos t, 3 \sin t) \quad \text{א.} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \text{ד. } x = t, y = \frac{t^2}{4} - 1, z = \frac{t^2}{4} + 1 \\ & r(t) = \left(t, \frac{t^2}{4} - 1, \frac{t^2}{4} + 1 \right) \\ & \text{ג. } x = t, y = t^2, z = t^4 \\ & r(t) = (t, t^2, t^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{ה. } x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 9 \cos^2 t \\ & r(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 9 \cos^2 t) \end{aligned}$$

$$(7, 6, 10e - 10) \quad \text{ג. } (42t, 42t, 10e^t) \quad \text{ב. } (21, 20, 10e) \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{dr}{dt} = (-4 \sin 4t, 4 \cos 4t, 4t^3), \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| = 4\sqrt{1+t^6}, \quad \frac{d|r|}{dt} = \frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}} \quad \text{א.} \\ & \text{ב. שאלת הוכחה.} \end{aligned} \quad (4)$$

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + s(4, 1, 0) \quad \text{ב.} \quad r'(t) = (4 \cos 4t, e^t + te^t, 4t^3) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0) \quad \text{ד.} \quad (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 2, 4) \quad \text{ג.}$$

$$2y + z = 0.5\pi \quad \text{ב.} \quad (9, 3, 5) \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$T(t) = \frac{1}{5}(3 \cos t, -3 \sin t, 4), \quad N(t) = (-\sin t, -\cos t, 0), \quad B(t) = \frac{1}{5}(4 \cos t, -4 \sin t, -3) \quad (7)$$

שאלת הוכחה. (8)

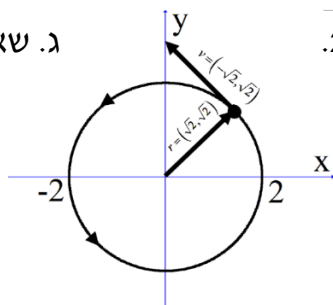
$$\begin{aligned} & \text{המישור הניצב } x + 4y + 12z = 114, \text{ מישור הנישוק } 24x - 12y + 2z = 16, \\ & \text{מישור היישור } 76x + 143y - 54z = 292. \end{aligned} \quad (9)$$

שאלת הוכחה. (10)

$$120.46^\circ \quad \text{ה.} \quad 12 \quad \text{ד.} \quad (0, -12, 0) \quad \text{ג.} \quad \sqrt{140} \quad \text{ב.} \quad (2, 6, 10) \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$v(t) = (v_{01}, v_{02}, v_{03} - gt), \quad |v(t)| = \sqrt{(v_{01})^2 + (v_{02})^2 + (v_{03} - gt)^2}, \quad a(t) = (0, 0, -g), \quad |a(t)| = g \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & v(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t) \quad \text{א.} \\ & |v(t)| = 2 \end{aligned} \quad \text{ב.} \quad \text{ג. שאלת הוכחה.}$$



$$r(t) = (2t, -t, -5t^2 + 100) \quad (14)$$

$$r(t) = (-2 \cos 3t + 4, 2 \sin 3t - 4t, 4t + 1) \quad (15)$$

$$v_{\min} = v(1) = \sqrt{6} \quad (16)$$

$$(17) \text{ א. } \left(-\frac{19}{16}, \frac{3}{2}, \frac{3}{16}\right) \quad \text{ב. } \alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

(18) שאלת הוכחה.

$$(19) \quad \kappa = \frac{2}{(4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad \rho = \frac{(4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

$$(20) \quad \rho = \frac{21\sqrt{21}}{2}$$

$$(21) \quad \kappa = \frac{2}{13}, \quad \rho = 6.5$$

(22) א. $\rho = R, \kappa = 1/R$. מכאן, רדיוס העקמומיות של העקום הוא קבוע ושווה ל-

$\rho = R$. ועקמומיות העקום קבועה ושווה ל- $\kappa = \frac{1}{R}$. ב. שאלת הוכחה.

(23) העקמומיות **מקסימלית** עבור $t = 0, \pi, 2\pi$ אז העקמומיות תהיה $\kappa = \frac{4}{9}$

בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מינימלי** ושווה ל- $\frac{9}{4}$. עקמומיות

מינימלית עבור $t = \pi/2, 3\pi/2$ אז העקמומיות תהיה $\kappa = \frac{3}{16}$ בנקודות אלה

רדיוס העקמומיות יהיה **מקסימלי** ושווה ל- $\frac{16}{3}$.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

$$(26) \text{ א. } \rho(x) = \frac{(x^4 + 1)^{\frac{3}{2}}}{2x^2 |x|}$$

ב. רדיוס העקמומיות מינימלי בנקודה (1,1) ובמקרה זה הוא $\sqrt{2}$.

$$\text{ג. } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$$

(27) רדיוס: $\frac{\sqrt{2}}{3}$; מרכז העקמומיות: $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

משוואת המעגל בנקודה: $(x-2/3)^2 + (y-2/3)^2 = 2/9$.

$$(28) \text{ א. } y = \pm 3, x = \frac{9}{8} \quad \text{ב. } (x-59/8)^2 + (y+27/16)^2 = (125/16)^2$$

$$(29) \quad \kappa = \frac{1}{R}, \quad \rho = R$$

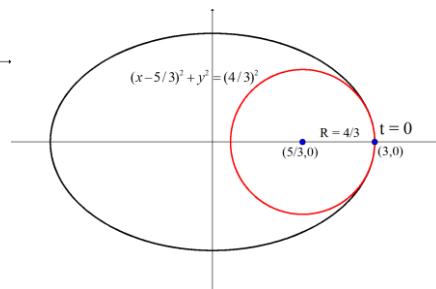
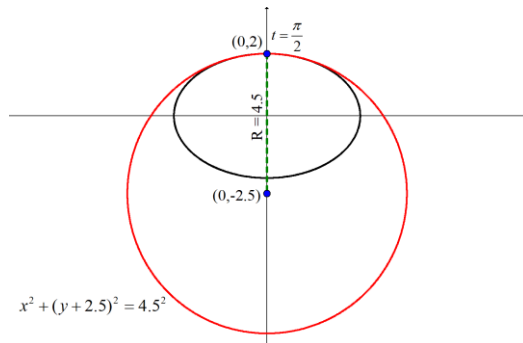
$$(30) \text{ א. } \rho = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \text{ב. } x^2 + (y+1)^2 = \frac{27}{16} \quad \text{ג. שאלת הוכחה.}$$

(31) שאלת הוכחה.

$$\kappa(0) = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2} \quad \kappa(\pi/2) = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2}$$

(32) א.

$$\rho(0) = \frac{b^2}{a} \quad \rho(\pi/2) = \frac{a^2}{b}$$

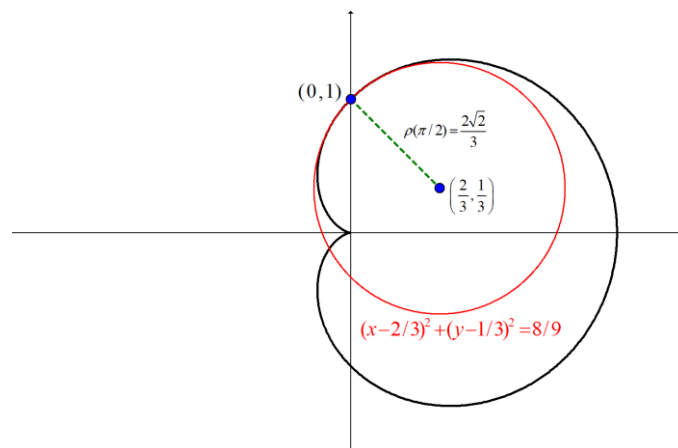


ב.

(33) שאלת הוכחה.

$$\kappa = \rho = 1 \quad (34)$$

(35) ראו שרטוט:



גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

שאלות

(1) יהיו $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ שדות וקטורים כלליים. הוכיחו:

א. $\operatorname{div}(F + G) = \operatorname{div}(F) + \operatorname{div}(G)$

ב. $\nabla(F + G) = \nabla(F) + \nabla(G)$

(2) יהי $F(x, y, z)$ שדה וקטורי, ותהי $\varphi = \varphi(x, y, z)$ פונקציה. הוכיחו כי $\operatorname{div}(\varphi F) = (\nabla \varphi) \cdot F + \varphi \operatorname{div} F$.

(3) יהי $F(x, y, z)$ שדה וקטורי ותהי $\varphi = \varphi(x, y, z)$ פונקציה. הוכיחו כי $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

או בניסוח אחר $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$.

ב. הוכיחו כי $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = 0$.

או בניסוח אחר $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$.

(4) יהיו $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ שדות וקטורים כללים. הוכיחו כי $\operatorname{curl}(F + G) = \operatorname{curl}(F) + \operatorname{curl}(G)$.

(5) יהי $F(x, y, z)$ שדה וקטורי.

הוכיחו כי $\nabla \times (\nabla \times F) = -\nabla^2 F + \nabla(\nabla \cdot F)$.

* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית $\varphi = \varphi(x, y, z)$.

הגרדיאנט של φ המסומן $\text{grad } \varphi$ מוגדר על ידי

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$
הגדרה (דיברגנץ וקטור של שדה וקטורי)

יהי $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ מגדירים את הדיברגנץ של $\mathbf{F}$ המסומן $\text{div } \mathbf{F}$, כך:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \text{div } \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (f, g, h) \\ \text{div } \mathbf{F} &= f_x + g_y + h_z \end{aligned}$$

מגדירים את ה- curl של $\mathbf{F}$ המסומן $\text{curl } \mathbf{F}$, על ידי:

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f, g, h) \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k} \end{aligned}$$

הערה: יש הרושמים $\text{rot } \mathbf{F}$ במקום $\text{curl } \mathbf{F}$.

כלים מתמטיים 96039

פרק 6 - וקטורים אלגבריים

תוכן העניינים

54	1. הצגה פרמטרית של ישר
57	2. מצב הדדי בין ישרים
60	3. הצגה פרמטרית של מישור
62	4. משוואת מישור
63	5. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור
64	6. מישורים המקבילים לצירים
65	7. מצב הדדי בין ישר ומישור
67	8. מצב הדדי בין מישורים
68	9. ישר חיתוך בין מישורים
(ללא ספר)	10. חישובי זוויות שונות
69	11. זווית בין שני ישרים
71	12. זווית בין ישר ומישור
72	13. זווית בין שני מישורים
(ללא ספר)	14. חישובי מרחקים
73	15. מרחק בין שתי נקודות במרחב
74	16. מרחק בין נקודה לישר
75	17. מרחק בין נקודה למישור
76	18. מרחק בין ישרים מקבילים
77	19. מרחק בין ישר למישור
78	20. מרחק בין מישורים מקבילים
79	21. מרחק בין ישרים מצטלבים
(ללא ספר)	22. סיכום מרחקים
80	23. שאלות מסכמות בוקטורים

הצגה פרמטרית של ישר:

סיכום כללי:

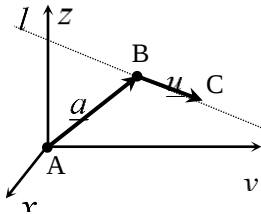
ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני ווקטורים.

הווקטור $\underline{a}$ נקרא ווקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.

הווקטור $\underline{u}$ נקרא ווקטור הכיוון של הישר.

זה הוא ווקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.



הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$

כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר ℓ .

דוגמא: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים

הבאים: $\underline{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,3,1)$; $\underline{u} = \overrightarrow{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $\ell: \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$

הערות:

- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
- ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $\ell: \underline{x} = (7,0,10) + t(-6,9,-27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

שאלות:

(23) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x} = (4,3,0) + t(1,-1,1)$?

(24) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x} = t(2,-1,5)$?

(25) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.

(26) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.

(27) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$

ומקביל לישר $\ell: \underline{x} = (0,3,-1) + t(-4,2,1)$.

(28) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$

ומאונך לישר: $\ell: \underline{x} = (1,2,0) + s(1,-2,4)$.

(29) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell: \underline{x} = (1,2,3) + t(4,5,6)$.

כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x, y ו- z .

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינטות: $x = 1 + 2t, y = 10, z = 4 - t$.

כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(30) מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

(31) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$

ומקביל לציר ה- z .

(32) מצא את נקודת החיתוך של הישר $\ell: \underline{x} = (1,-2,6) + t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

תשובות סופיות:

(23) כן.

(24) לא.

(25) $\ell : \underline{x} = (-5, -2) + t(6, 8)$

(26) $\ell : \underline{x} = (4, 1, 1) + t(1, 1, 3)$

(27) $\ell : \underline{x} = (2, -7, 1) + s(-4, 2, 1)$

(28) $\ell : \underline{x} = (1, 2, 3) + t(2, 1, 0)$

(29) א. $x = 1 + 4t, y = 2 + 5t, z = 3 + 6t$ ב. $\ell : \underline{x} = (1, 10, 4) + t(2, 0, -1)$

(30) $\ell : \underline{x} = t(0, 1, 0)$

(31) $\ell : \underline{x} = (3, -1, 4) + t(0, 0, 1)$

(32) $(7, -5, 0)$

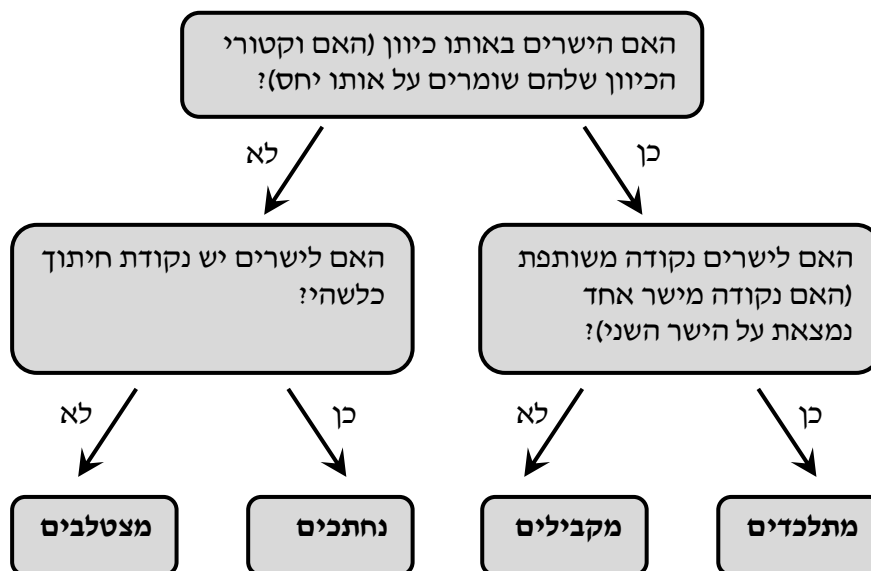
מצב הדדי בין ישרים:

סיכום כללי:

ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



שאלות:

(33) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_1 : \underline{x} = (2, -3, 0) + t(5, -1, 2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (12, -5, 4) + s(-10, 2, -4)$

(34) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_3 : \underline{x} = (0, 1, -7) + t(-2, 1, 1)$, $\ell_4 : \underline{x} = (2, 0, -6) + s(6, -3, -3)$

(35) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_5 : \underline{x} = (-3, 5, 1) + t(4, 0, -1)$, $\ell_6 : \underline{x} = (-1, 7, 4) + s(-1, 1, 2)$

(36) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_7 : \underline{x} = (3, 0, 0) + t(2, -2, 5)$, $\ell_8 : \underline{x} = (0, 1, -5) + s(3, 1, -2)$

(37) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_9 : \underline{x} = (-4, 1, -1) + t(3, 0, -1)$, $\ell_{10} : \underline{x} = s(6, 0, -2)$

(38) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_{11} : \underline{x} = (2, 8, -1) + t(1, 0, 0)$, $\ell_{12} : \underline{x} = (-5, 8, 2) + s(2, 0, -1)$

(39) מצא את ערכו של הפרמטר k שבעבורו הישרים הבאים :
 $\ell_1 : \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1, -2, 2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$

א. מקבילים.

ב. מתלכדים.

(40) נתונות הנקודות : $A(3, -1, 5)$, $B(k, -1, 3)$, $C(-6, 3, -1)$, $D(-2, 3, k)$
הראה כי לכל ערך של k הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

תשובות סופיות:

(33) מתלכדים.

(34) מקבילים.

(35) נחתכים, $(1, 5, 0)$.

(36) מצטלבים.

(37) מקבילים.

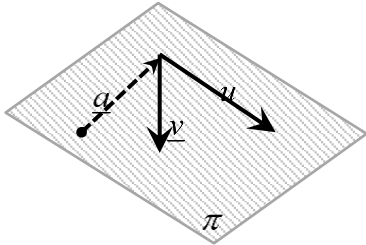
(38) נחתכים, $(1, 8, -1)$.

(39) א. $k = 2$ ב. $k = -2$.

(40) הוכחה.

הצגה פרמטרית של מישור:

סיכום כללי:



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים. הווקטור $\underline{a}$ הוא ווקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם וקטורי הכיוון של המישור. אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר t, s הם מספרים ממשיים כלשהם ו- $\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור π .

שאלות:

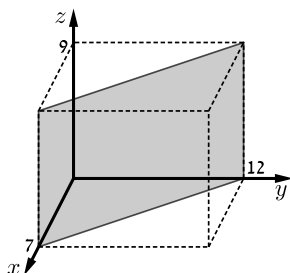
(41) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבא:
 $A(1, -4, 0)$, $B(3, 6, 2)$, $C(0, -3, 1)$

(42) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6, 7, -1)$, ומכיל את הישר $\ell : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4)$

(43) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3)$, $\ell_2 : \underline{x} = (2, 16, 11) + s(0, 1, -6)$. הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

(44) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5, -2, -1)$ ומכיל את ציר ה- x .

(45) מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.



(46) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המסומן.

תשובות סופיות:

$$\cdot \pi : \underline{x} = (1, -4, 0) + t(2, 10, 2) + s(-1, 1, 1) \quad (41)$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4) + s(8, 9, -6) \quad (42)$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3) + s(0, 1, -6) \quad (43)$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(5, -2, -1) \quad (44)$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1) \quad (45)$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 1) + s(-7, 12, 0) \quad (46)$$

משוואת מישור:

סיכום כללי:

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi: ax + by + cz + d = 0$,
 כאשר: (x, y, z) היא נקודה על המישור והמקדמים a, b, c הם שיעורי ווקטור הנורמל
 של המישור המסומן: $\underline{h} = (a, b, c)$.

שאלות:

(47) קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi: 2x - y + 3z - 6 = 0$
 א. $D(5, 7, 1)$ ב. $E(2, -1, 1)$

(48) מצא את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1, k, -1)$ נמצאת על
 המישור: $\pi: kx - 2y + (1+k)z + 7 = 0$.

(49) נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x + 2y - z - 9 = 0$.
 מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

(50) נתונה משוואת מישור: $\pi: 4x + y - 2z + 8 = 0$.
 מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

תשובות סופיות:

(47) א. על המישור. ב. לא על המישור.

(48) $k = 3$.

(49) $(3, 0, 0)$, $\left(0, 4\frac{1}{2}, 0\right)$, $(0, 0, -9)$.

(50) $\ell: \underline{x} = (0, -8, 0) + t(0, 2, 1)$.

מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור:

שאלות:

51 נתונה משוואת מישור: $2x + 3z - 12 = 0$: π . כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

52 נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = (2, -5, 0) + t(1, 0, 2) + s(0, -1, 3)$. מצא את משוואת המישור.

53 נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$. מצא את משוואת המישור.

54 המישור π עובר בנקודות: $A(1, 0, -3)$, $B(2, 0, 0)$, $C(4, -1, 0)$. מצא את משוואת המישור.

55 ענה על הסעיפים הבאים:

א. לפניך הנקודות הבאות: $(2, 0, 5)$, $(0, 1, -2)$, $(1, 1, 0)$.

i. הראה ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד ומצא הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.

ii. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.

ג. האם הנקודה $(4, 2, 1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א'?

תשובות סופיות:

51 $\pi : \underline{x} = (0, 0, 4) + t(0, 1, 0) + s(6, 0, -4)$

52 $\pi : -2x + 3y + z + 19 = 0$

53 $\pi : x - 3y + 8z = 0$

54 $\pi : 3x + 6y - z - 6 = 0$

55 i. $\pi : \underline{x} = (1, 1, 0) + t(-1, 0, -2) + s(1, -1, 5)$ ii. $-2x + 3y + z - 1 = 0$

ב. למשל: $(0, 0, 1)$, $(-0.5, 0, 0)$ ג. לא.

מישורים המקבילים לצירים:

שאלות:

(56) נתונה משוואת מישור: $(k+2)x + (k^2 - 2k - 3)y - 3z + k^2 - 1 = 0$.
 לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

(57) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$ ו- $x+3y+2z-6=0$. מצא את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות:

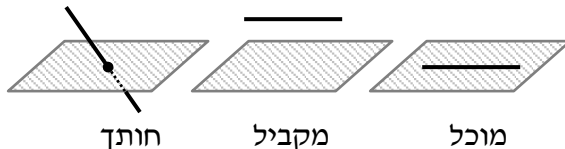
(56) $k=3$.

(57) 6 יח"נ.

מצב הדדי בין ישר ומישור:

סיכום כללי:

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:



- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

שאלות:

58 נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell: \underline{x} = (5, 0, 1) + t(4, 1, -2)$, $\pi: 2x - y - 3z + 6 = 0$. קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

59 נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell: \underline{x} = (2, -1, 6) + t(-1, 1, 2)$, $\pi: x - 3y + 2z - 11 = 0$. קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

60 נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell: \underline{x} = (-6, 1, 0) + t(3, 0, -1)$, $\pi: 2x + y + 6z + 11 = 0$. קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

61 נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell: \underline{x} = (1, a, 3) + t(4, 1 - b, 0)$, $\pi: 2x - y + z - 4 = 0$. מצא את ערכי a ו- b בעבורם הישר מוכל במישור.

תשובות סופיות:

58 הישר חותך, $(1, -1, 3)$.

59 מקבילים.

60 הישר מוכל.

61 $a = 1, b = -7$.

מצב הדדי בין מישורים:

סיכום כללי:

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא ישר החיתוך.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ו- $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

נחתכים	מקבילים	מתלכדים
כל מצב אחר	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

שאלות:

62 נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א. $\pi_1: 2x - y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2: 4x - 2y + 8z - 10 = 0$

ב. $\pi_3: x + 3y - z + 1 = 0$, $\pi_4: 3x + 9y - 3z - 8 = 0$

ג. $\pi_5: 5x - 2y - 2z + 3 = 0$, $\pi_6: 2x + 3y + z - 5 = 0$

63 נתונים שני המישורים הבאים:

$\pi_1: 2x + (k^2 + k)y - 2z + 1 = 0$, $\pi_2: 4x + 12y - 4z + k^2 - 2 = 0$

מצא את ערכי k עבורם המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים.

תשובות סופיות:

62 א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

63 א. $k \neq 2, -3$. ב. $k = -3$. ג. $k = 2$.

ישר חיתוך בין מישורים:

שאלות:

64 נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1: 4x + y - 2z + 2 = 0$, $\pi_2: 2x - y + z + 10 = 0$. מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

65 נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3: 8x + 2y - 3z + 2 = 0$, $\pi_4: 2x - 3y + z + 4 = 0$. מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

66 נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5: 3x - 3y + z + 2 = 0$, $\pi_6: 5x - 2z + 20 = 0$. מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

67 נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7: x - 2y - z + 6 = 0$, $\pi_8: z - 2 = 0$. מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

68 מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi: 6x - 5y + z + 18 = 0$ עם המישור $[xz]$.

69 נתונים שני מישורים: $\pi_1: x - 3y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2: 4x + y - z - 6 = 0$. מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

תשובות סופיות:

64 $\ell: \underline{x} = (-2, 6, 0) + t(2, 16, 12)$

65 $\ell: \underline{x} = (0, 2, 2) + t(1, 2, 4)$

66 $\ell: \underline{x} = (0, 4, 10) + t\left(4, 7\frac{1}{3}, 10\right)$

67 $\ell: \underline{x} = (0, 2, 2) + t(4, 2, 0)$

68 $\ell: \underline{x} = (-3, 0, 0) + t(3, 0, -18)$

69 $\ell: \underline{x} = t(1, 9, 13)$

זווית בין שני ישרים:

סיכום כללי:

- זווית חדה α בין שני ישרים $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$ ו- $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos \alpha = \frac{|\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2|}{|\underline{u}_1| \cdot |\underline{u}_2|}$.

שאלות:

(70) מצא את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\ell_1 : \underline{x} = (4, 0, 0) + t(6, 8, 1)$, $\ell_2 : \underline{x} = s(-4, 2, -4)$.

ב. $\ell_1 : \underline{x} = (10, 17, -18) + t(3, 0, -6)$, $\ell_2 : \underline{x} = (6, 5, 4) + s(0, 4, 0)$.

(71) מצא את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $A(3, 4, 6)$, $B(6, 0, -2)$ וישר העובר דרך הנקודות: $C(6, 5, 1)$, $D(-1, 4, 2)$ וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.

(72) נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

i. A ו- B .

ii. B ו- C .

iii. A ו- C .

ב. מי מבין הנקודות $D(4, 2, -1)$ ו- $E(7, 7, -3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC .

(73) נתון מישור שמשוואתו: $3x - 4y + 6 = 0$. הנקודות $A(x, 6, 1)$, $B(-2, y, -1)$.

נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$.

מצא את שיעורי הנקודה C אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו- AC

הוא: $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

תשובות סופיות:

(70) א. 78.521° ב. 90° .(71) 68.21° . הישרים מצטלבים.(72) א. i. $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(3, 5, -1)$ א. ii. $\ell : \underline{x} = (4, 2, -1) + t(-1, -3, 3)$ א. iii. $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(2, 2, 2)$ ב. הנקודה D. ג. 35.477° .

(73) C(0, 2, 11) או C(0, 28.45, 11)

זווית בין ישר ומישור:

סיכום כללי:

- זווית חדה α בין ישר $l = \underline{a} + t\underline{u}$ ומישור $\pi : ax + by + cz + d = 0$

$$\sin \alpha = \left| \frac{\underline{u} \cdot \underline{h}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{h}|} \right|$$

תחושב ע"י הנוסחה הבאה:

שאלות:

(74) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:

$$\ell : \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(-2, 1, 2), \quad \pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$$

(75) נתונות הנקודות $A(1, -1, 2)$, $B(0, 2, -1)$, $C(1, 2, 5)$, $D(-7, 3, -1)$

מצא את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

(76) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה

$$2x + y - 2z - 6 = 0. \quad S(3, 1, -2)$$

היא: קדקוד הפירמידה הוא

מצא את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,

$$\text{אם נתון כי שיעורי הקודקוד B מקיימים: } x_B = z_B = -1$$

תשובות סופיות:

(74) 18.87°

(75) 44.83°

(76) 14.9°

זווית בין שני מישורים:

סיכום כללי:

• זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ו- $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

• תחושב ע"י: $\cos \alpha = \left| \frac{h_1 \cdot h_2}{|h_1| \cdot |h_2|} \right|$

שאלות:

(77) מצא את הזווית שבין המישורים הבאים: $\pi_1: 4x + 3y + z - 12 = 0$ ו- $\pi_2: 4x - 7y + 5z + 3 = 0$

(78) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקודקודה הם: $A(0, 2, -5)$, $B(3, -1, 1)$, $C(7, -1, -5)$, $D(3, 2, 0)$. מצא את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

(79) מצא את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x + 5y - z + 4 = 0$ למישור $[xz]$.

תשובות סופיות:

(77) 90°

(78) 87.539°

(79) 32.312°

מרחק בין שתי נקודות במרחב:

סיכום כללי:

מרחק בין שתי נקודות $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

שאלות:

80 נתונות הנקודות: $A(2, 4, -5)$, $B(0, -2, 6)$ ו- $C(k, -1, 13-k)$. מצא ערכי k עבורם המשולש ABC יהיה שווה-שוקיים: $AB = AC$.

תשובות סופיות:

80 $k = 8$ או $k = 12$.

מרחק בין נקודה לישר:

סיכום כללי:

מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

שאלות:

(81) מצא את המרחק שבין הנקודה $A(13, -1, -19)$ לישר $\ell: \underline{x} = t(2, 0, -7)$.

(82) נתונות הנקודות $A(1, 6, -1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(6, -4, 0)$.
חשב את שטח המשולש ABC.

(83) על הישר $\ell: \underline{x} = (5, -2, 0) + t(0, 1, -1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5, 4, 2)$.
מצא את שיעורי הקודקוד B (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות:

(81) $\sqrt{54}$.

(82) 12.75 יח"ש.

(83) $B(5, 4, -6)$ או $B(5, -4, 2)$.

מרחק בין נקודה למישור:

סיכום כללי:

מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ למישור $\pi: ax + by + cz + d = 0$ יחושב

$$.d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| \text{ ע"י:}$$

שאלות:

(84) מצא את מרחקו של המישור $4x - 2y - 4z + 15 = 0$ מראשית הצירים.

(85) מצא משוואת מישור המאונך לישר $\ell: \underline{x} = (1, -8, 3) + t(3, -2, 1)$ ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4, 5, -9)$.

(86) נתונים ישר ומישור: $\pi: 2x + 4y - 4z + 15 = 0$, $\ell: \underline{x} = (7, 19, -3) + t(3, 14, -4)$. מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

תשובות סופיות:

$$.2\frac{1}{2} \quad (84)$$

$$\pi: 3x - 2y + z - 7 = 0 \text{ או } \pi: 3x - 2y + z + 21 = 0 \quad (85)$$

$$(1, -9, 5) \text{ או } (4, 5, 1) \quad (86)$$

מרחק בין ישרים מקבילים:

סיכום כללי:

מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו.

שאלות:

87 נתונות הנקודות $A(15, 0, -4)$, $B(12, -5, 2)$, $C(6, 1, 4)$, $D(12, 11, -8)$.

א. מצא את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B.

ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצא את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

88 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1: \underline{x} = (2, 0, -1) + t(1, -2, 1) \quad , \quad l_2: \underline{x} = (-8, -1, 19) + s(-4, 1, 6)$$

$$l_3: \underline{x} = (-2, 7, -11) + r(-2, 4, -2) \quad , \quad l_4: \underline{x} = (-2, 1, 5) + q(4, -1, -6)$$

א. הוכח כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצא את שטח המלבן.

תשובות סופיות:

87 א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

88 א. הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.

מרחק בין ישר למישור:

סיכום כללי:

מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאת מרחקה מהמישור.

שאלות:

(89) נתונה משוואת מישור : $4x - z + 6 = 0$.

א. מצא את המצב ההדדי בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

ב. מצא את המרחק בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

(90) נתונים ישר ומישור : $\pi: 3x + 12y - 4z + k - 10 = 0$, $l: \underline{x} = (1, k-1, 5) + t(4, -2, -3)$.

א. הוכח שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצא את ערכו של הפרמטר k שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

תשובות סופיות:

(89) א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$.

(90) א. הוכחה. ב. $k = 2, 4$.

מרחק בין מישורים מקבילים:

סיכום כללי:

מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
1. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.

2. שימוש בנוסחה: $d = \left| \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$.

שאלות:

91 נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x - 4y + 5z - 10 = 0$.

מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

92 נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1: x - 2y - 2z + 6 = 0$, $\pi_2: x - 2y - 2z - 12 = 0$.

מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

93 נתונים שישה מישורים:

$$\pi_1: 2x + y - 2z - 11 = 0, \quad \pi_2: x + 2y + 2z + 5 = 0, \quad \pi_3: 2x - 2y + z + 3 = 0$$

$$\pi_4: 2x + y - 2z + 7 = 0, \quad \pi_5: x + 2y + 2z - 1 = 0, \quad \pi_6: kx + qy + z + p = 0$$

מצא את ערכי הפרמטרים k, q, p שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

94 כדור שמרכזו בנקודה $O(3, 8, -1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון

$$12x + 4y - 3z - 6 = 0$$

מונח על מישור שמשוואתו $12x + 4y - 3z - 6 = 0$. מצא את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

תשובות סופיות:

91 $\pi_1: 3x - 4y + 5z + 10 = 0, \pi_2: 3x - 4y + 5z - 30 = 0$

92 $\pi_3: x - 2y - 2z - 3 = 0$

93 $k = 2, q = -2, p = 18, -12$

94 $12x + 4y - 3z - 136 = 0$

מרחק בין ישרים מצטלבים:

סיכום כללי:

מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני.

שאלות:

95 נתונים שני הישרים הבאים: $\ell_1 : \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$

ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$.

הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

96 נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים: $\ell_1 : \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$

ו- $\ell_4 : \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$.

מצא את המרחק שביניהם.

97 מצא את מרחק הישר $\ell : \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$ מציר ה- z .

תשובות סופיות:

95 $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.

96 1.567 יח"א.

97 $\sqrt{2}$ יח"א.

שאלות מסכמות בוקטורים:

שאלות:

- (1) נתונות הנקודות $A(1,1,3)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$.
- מצא הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C.
הראה כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.
 - חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.
 - מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.
- (2) מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
- במקרה בו הישרים נחתכים מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים מצא גם את המרחק ביניהם.
- $\underline{x} = (1,0,1) + t(1,2,0)$, $\underline{x} = (1,1,0) + s(2,4,0)$
 - $\underline{x} = (-2,2,4) + u(6,6,1)$, $\underline{x} = (1,-1,0) + s(12,-3,1)$
 - $\underline{x} = (1,1,2) + t(1,2,-1)$, $\underline{x} = (2,3,1) + s(2,4,-2)$
 - $\underline{x} = (1,-1,0) + t(0,2,-4)$, $\underline{x} = (2,0,3) + s(-1,-3,1)$
- (3) מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
- במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור. במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.
- $2x - 3y + 4z - 5 = 0$, $\underline{x} = (1,0,2) + t(-1,2,2)$
 - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $\underline{x} = (-3,0,4) + t(4,-2,-6)$
 - $2x - 14y + 10z = -6$, $\underline{x} = (2,1,-2) + t(-2,2,0)$
- (4) מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם.
במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.
- $x - 2y + 2z - 10 = 0$, $2x + y + 2z - 4 = 0$
 - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $4x - 10y + 6z - 8 = 0$
 - $2x - 14y + 10z = -6$, $x - 7y + 5z = -3$

- (5) נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$ שנפחה הוא 8.
 משוואת המישור שעליו מונח הבסיס $ABCD$ היא: $\pi_1 : 4x + y + 3z - 28 = 0$.
 משוואת המישור שעליו מונחת הפאה $ABB'A'$ היא: $\pi_2 : x + 2y - 2z + 6 = 0$.
 מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).
- (6) הנקודה $A(4, 0, -1)$ נמצאת על כדור שמרכזו $O(1, 1, 2)$.
 מצא את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A .
- (7) נתונים מישור וישר: $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$, $\ell : \underline{x} = (1, 5, 5) + t(1, 1, 0)$.
 מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.
- (8) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : 2x - 4y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 1 = 0$.
 מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).
- (9) נתונים ישר ומישור: $\pi : 6x + 2y - z + 5 = 0$, $\ell_1 : \underline{x} = (0, -3, 0) + t(1, 1, -8)$.
 ישר נוסף, ℓ_2 , המקביל למישור π , עובר בנקודה $P(1, 0, -4)$ וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q .
 מבין הנקודות שבמישור π , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q .
 מצא את שטח המלבן $PQQ'P'$. (הדרכה: הבע באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2).
- (10) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2 : 3x + y + 2z + 11 = 0$.
 ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
 המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של 60° עם הישר $\ell_2 : \underline{x} = (1, 3, -4) + t(1, 1, 0)$.
 מצא את משוואת המישור π_3 .

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \underline{x} = (1, 2, 0) + t(0, -1, 1) \quad \text{ב. } \sqrt{2} \quad \text{ג. } y - z + 2 = 0$$

$$(2) \quad \text{א. מקבילים, } 1.095 \quad \text{ב. מצטלבים, } 4.07 \quad \text{ג. מתלכדים} \\ \text{ד. נחתכים בנקודה } (1, -3, 4), \text{ הזווית היא: } 47.6^\circ$$

$$(3) \quad \text{א. מקביל, } 0.9284 \quad \text{ב. מוכל} \\ \text{ג. חותך בנקודה } (3.5, -0.5, -2), \text{ הזווית היא: } 40.78^\circ$$

$$(4) \quad \text{א. נחתכים. ישר חיתוך: } \underline{x} = (0, -2, 3) + t(3, -1, -2.5), \text{ זווית: } 63.6^\circ \\ \text{ב. מקבילים. המרחק: } 0.324 \quad \text{ג. מתלכדים}$$

$$(5) \quad \ell: \underline{x} = (0, 2.5, 8.5) + t(2, -2.75, -1.75), \quad \ell: \underline{x} = (0, 7, 7) + t(8, -11, -7)$$

$$(6) \quad \pi: -3x + y + 3z + 15 = 0$$

$$(7) \quad (0, 0, 4) \text{ או } \left(0, 0, 14\frac{4}{5}\right)$$

$$(8) \quad \ell: \underline{x} = \left(0, -14, -15\frac{3}{4}\right) + t(-14, 14, 21)$$

$$(9) \quad 10.467 \text{ יח"ש}$$

$$(10) \quad \pi_3: x + 2y - z - 58 = 0 \text{ או } \pi_3: 2x + y + z - 5 = 0$$

כלים מתמטיים 96039

פרק 7 - גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה

תוכן העניינים

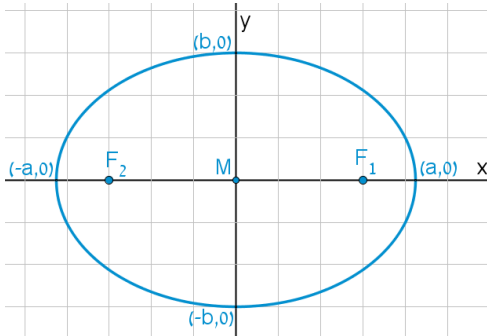
83	1. האליפסה
87	2. הפרבולה

האליפסה:

סיכום כללי:

הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.



מושגים באליפסה:

- הציר הגדול: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- x .
- הציר הקטן: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- y .
- מרכז האליפסה: מפגש צירי האליפסה (ראה איור).
באליפסה קנונית מרכז האליפסה נמצא בראשית הצירים.
- מוקדי האליפסה: שתי נקודות קבועות שבעבורן סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה הוא גודל קבוע השווה ל- $2a$. המוקדים יסומנו ב- F_1 ו- F_2 ושיעוריהם הם: $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$.
- רדיוסי ווקטור: המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים.
אורך הרדיוס מנקודה (x,y) שעל האליפסה למוקד הימני הוא: $r_1 = a - \frac{cx}{a}$.
אורך הרדיוס מנקודה (x,y) שעל האליפסה למוקד השמאלי הוא: $r_2 = a + \frac{cx}{a}$.
- מיתר: קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה.
- קוטר: מיתר העובר דרך מרכז האליפסה.

משוואות וקשרים:

- משוואת אליפסה קנונית היא: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ או $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
- הקשר בין הפרמטרים של האליפסה הוא: $a^2 - b^2 = c^2$.
- מכפלת שיפועי מיתר באליפסה והקוטר החוצה אותו היא קבועה ושווה ל- $-\frac{b^2}{a^2}$.

שאלות:

- (1) מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה $x^2 + 4y^2 = 36$.
- (2) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא $2\sqrt{3}$.
- (3) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה $8\sqrt{2}$.
- (4) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה $(-3\sqrt{3}, 2)$.
- (5) מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 16$ ומוקד אחד שלה הוא בנקודה $(\sqrt{10}, 0)$.
- (6) מצא את משוואתה של אליפסה שחותכת את ציר ה- y בנקודה $(0, -2\sqrt{5})$ והמרחק בין המוקד הימני לקדקוד הימני בה הוא 2.
- (7) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות $(-2, \sqrt{6})$ ו- $(\sqrt{14}, 1)$.
- (8) מצא על האליפסה $3x^2 + 4y^2 = 144$ את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.
- (9) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה $(-3, 1)$ ומכפלת המרחקים מנקודה זו למוקדים הוא 6.
- (10) מצא על האליפסה $x^2 + 3y^2 = 12$ את הנקודות שמהן רואים את הקטע שבין שני המוקדים בזווית ישרה.

(11) מצא את משוואתו של קוטר באליפסה $x^2 + 4y^2 = 50$ ששיפועו חיובי ואורכו $\sqrt{56}$.

(12) נתונים האליפסה $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ והישר $y = 2x + k$. מצא לאלו ערכים של הפרמטר k הישר משיק לאליפסה ולאלו ערכים של הפרמטר k הישר חותך את האליפסה.

(13) מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $3x^2 + 5y^2 = 120$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

(14) מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

(15) באליפסה $5x^2 + 9y^2 = 90$ חסום מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצא את שטח המלבן אם שתיים מצלעותיו עוברות במוקדי האליפסה.

(16) באליפסה $x^2 + 5y^2 = 16$ חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה. מצא את שיעורי קדקודיו האחרים.

(17) באליפסה חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה וקדקודיו האחרים הם נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y .

מצא את משוואת האליפסה אם אחד ממוקדיה נמצא בנקודה $(4\sqrt{2}, 0)$.

(18) מצא באליפסה $2x^2 + 3y^2 = 12$ משוואת מיתר שנקודת האמצע שלו היא $(1.5, 1)$.

(19) ישר שמשוואתו $x - y - 3 = 0$ חותך מאליפסה מיתר שאמצעו בנקודה $(2, -1)$. מצא את משוואת האליפסה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2\sqrt{2}, -2)$.

$$(20) \text{ נתונה המשוואה } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - 25} = 1, (0 < a \neq 5).$$

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. לאיזה ערך של a המשוואה מייצגת מעגל?

ii. לאלו ערכים של a המשוואה מייצגת אליפסה?

ב. הוכח כי בעבור $a = 4$ אין אף נקודה על האליפסה שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad 2a = 12, 2b = 6$$

$$(2) \quad \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$(3) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$(4) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$(5) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{6} = 1$$

$$(6) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

$$(7) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$$

$$(8) \quad (4, \sqrt{24}), (4, -\sqrt{24}), (-4, \sqrt{24}), (-4, -\sqrt{24})$$

$$(9) \quad \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$(10) \quad (\sqrt{6}, \sqrt{2}), (-\sqrt{6}, \sqrt{2}), (\sqrt{6}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$$

$$(11) \quad y = \sqrt{6}x$$

$$(12) \text{ משיק: } k = \pm 12, \text{ חותך: } -12 < k < 12.$$

$$(13) \quad S = 60 \text{ יח"ש}$$

$$(14) \quad S = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

$$(15) \quad S = 26 \frac{2}{3} \text{ יח"ש}$$

$$(16) \quad (1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3})$$

$$(17) \quad \frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$(18) \quad y = -x + 2.5$$

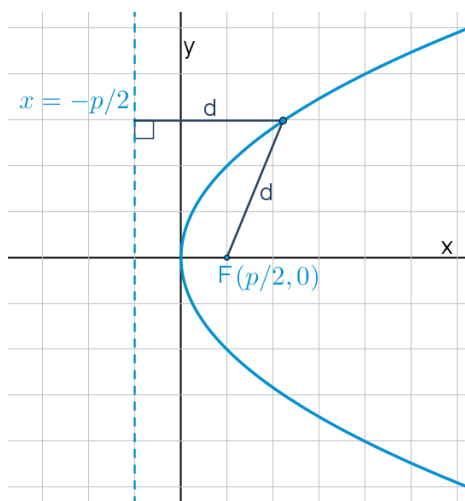
$$(19) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$$

$$(20) \text{ א. i. } a = \sqrt{12.5} \text{ ii. } a \neq \sqrt{12.5}$$

הפרבולה:

סיכום כללי:

הגדרה:



המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מנקודה קבועה שווה למרחקן מישר קבוע נקרא פרבולה. הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה והישר הקבוע נקרא מדריך הפרבולה.

מושגים בפרבולה:

- מוקד: נקודה קבועה שמרחק כל נקודה על הפרבולה ממנה שווה למרחק הנקודה מהמדריך.
- מדריך: ישר קבוע שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליו שווה למרחק הנקודה מהמוקד.
- קדקוד הפרבולה: ראשית הצירים.
- רדיוס: מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה: $r = x + \frac{p}{2}$.
- מיתר: קטע המחבר בין שתי נקודות על הפרבולה.
- קוטר (לא בחומר): ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה (ציר ה- x אצלנו).

משוואת הפרבולה:

משוואת הפרבולה הקנונית היא: $y^2 = 2px$ כאשר p הוא פרמטר הפרבולה.

משיק לפרבולה:

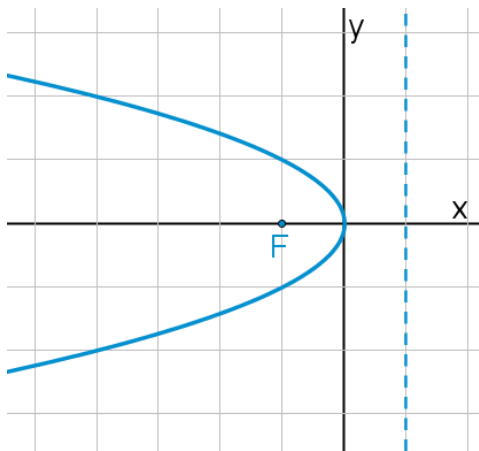
- משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה $A(x_0, y_0)$ שעליה היא: $yy_0 = p(x + x_0)$.
- שיפוע המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה $A(x_0, y_0)$ שעליה הוא: $m = \frac{p}{y_0}$.

מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

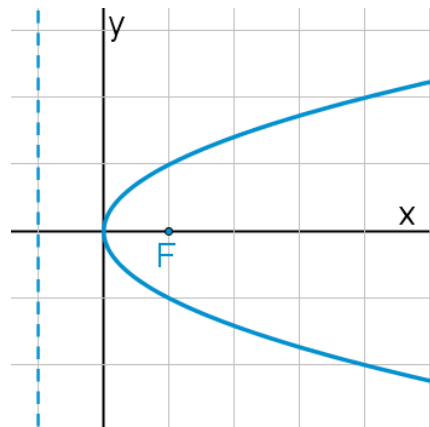
משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים לפרבולה $y^2 = 2px$ היוצאים מהנקודה $A(x_0, y_0)$ שמחוץ לפרבולה היא: $yy_0 = p(x + x_0)$.

תיאורים גרפיים:

פרבולה שמשוואתה $y^2 = -2px$:



פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$:



שאלות:

- (1) נתונה הפרבולה $y^2 = 18x$. מצא מהו הפרמטר, המוקד והמדריך שלה.
- (2) מצא את משוואתה של פרבולה שהישר $x = -3$ הוא המדריך שלה.
- (3) מצא את משוואתה של פרבולה שהמרחק בין המוקד שלה למדריך שלה הוא 5.

- (4) מצא את משוואתה של פרבולה שעוברת בנקודה $(-6, 9)$.
- (5) מצא את משוואתה של פרבולה שמוקדה מתלכד עם המוקד הימני של האליפסה $x^2 + 2y^2 = 18$.
- (6) מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 6x$ שמרחקן מהמוקד הוא 4.
- (7) מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 8x$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.
- (8) מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 2px$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.
- (9) מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2 = 10x$.
- (10) הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2 = 2px$.
- (11) נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו מונח על ציר ה- x , וקדקודיו האחרים מונחים על מדריך הפרבולה אם ידוע שמפגש תיכוני המשולש הוא מוקד הפרבולה.
- (12) את נקודה A שעל הפרבולה $y^2 = 20x$ חיברו עם המוקד F וגם העבירו ממנה אנך למדריך. היקף הטרפז, שבסיסיו הם האנך והקטע על ציר ה- x שבין מוקד הפרבולה למדריך שלה, שוק אחת שלו היא AF והשוק השנייה שלו מונחת על המדריך, הוא 27.5. חשב את שטח הטרפז.
- (13) קצות מיתר בפרבולה $y^2 = 4x$ הם A ו-B. מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע שהמיתר עובר במוקד הפרבולה ושערך ה- x של נקודה A הוא 4.
- (14) מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2 = 16x$, שעובר בראשית הצירים ומרחקו מהמוקד הוא $\frac{8}{\sqrt{5}}$.

(15) מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2 = 2x$, שאמצעו בנקודה $\left(1\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

(16) נתונה הפרבולה $y^2 = 4x$ והישר $y = 2x + k$, לאיזה ערך של k הישר משיק לפרבולה?

(17) נתונה הפרבולה $y^2 = 6x$.

א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות שבהן $x = 1.5$.

ב. הוכח שנקודת החיתוך של הנורמלים בנקודות אלה נמצאת על ציר ה- x .

(18) הנקודות A ו-B נמצאות על הפרבולה $y^2 = 12x$. נתון כי $y_A = 4$. מצא את שיעורי נקודה B אם ידוע שהמשיקים לפרבולה בנקודות הנתונות יוצרים זווית ישרה.

(19) נקודה A נמצאת על הפרבולה $y^2 = 28x$ ברביע הרביעי. אורך הנורמל לפרבולה מנקודה A עד לציר ה- x הוא $7\sqrt{5}$. מצא את משוואת הנורמל.

(20) מרחק המוקד של הפרבולה $y^2 = 8x$ ממשיק לה ששיפועו חיובי הוא $\sqrt{8}$. מצא את משוואת המשיק.

(21) נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. הבע באמצעות p את שיעורי הנקודה שעל הפרבולה ברביע הראשון, שמרחק המשיק בה ממוקד הפרבולה הוא p .

(22) נתונות שתי פרבולות: I. $y^2 = 6x$, II. $y^2 = 12x$. ישר שעובר בראשית הצירים חותך את הפרבולות בנקודות A ו-B. הראה כי המשיקים בנקודות A ו-B מקבילים.

(23) נתונה הפרבולה $y^2 = 14x$ והנקודה $(-1, -3)$, ממנה יוצאים שני משיקים לפרבולה. מצא את משוואת המיתר המחבר בין נקודות ההשקה.

- (24)** נתונה הפרבולה $y^2 = 18x$ ונקודה ברביע השלישי, ששיעור ה- x שלה קטן ב-1 משיעור ה- y שלה. מהנקודה יוצאים שני משיקים לפרבולה. המיתר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם הצירים משולש ששטחו 18. מצא את משוואת המיתר.
- (25)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו במוקד הפרבולה $y^2 = 24x$ והוא משיק למדריך שלה.
- (26)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה $(8,0)$ והוא משיק לפרבולה $y^2 = 10x$ בשתי נקודות.
- (27)** נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$ ומעגל שמרכזו על ציר ה- x והוא משיק לפרבולה מבפנים בשתי נקודות. הישר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם המשיקים בנקודות אלה משולש שווה צלעות. הבע באמצעות p את משוואת המעגל.
- (28)** הנקודה $A(2,3)$ נמצאת על פרבולה. מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לפרבולה בנקודה A ומשיק לציר ה- y .
- (29)** נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$ שבה $p > 4$. הישר $x = 2$ חותך את הפרבולה בנקודות A ו- B . הבע באמצעות p את שיעורי קדקוד C של משולש $\triangle ABC$ שמוקד הפרבולה הוא מפגש האנכים האמצעיים בו, אם ידוע שקדקוד C נמצא על ציר ה- x .
- (30)** אליפסה שמשוואתה $x^2 + 4y^2 = 16$ חותכת את הפרבולה $y^2 = 2px$ בשתי נקודות. המרובע שקדקודיו הם נקודות החיתוך, מרכז האליפסה וקדקודה הימני של האליפסה הוא מעוין. מצא את משוואת הפרבולה.

תשובות סופיות:

- (1) $p = 9, F\left(4\frac{1}{2}, 0\right)$
- (2) $y^2 = 12x$
- (3) $y^2 = 10x$
- (4) $y^2 = 4x$
- (5) $y^2 = 12x$
- (6) $\left(2\frac{1}{2}, \sqrt{15}\right), \left(2\frac{1}{2}, -\sqrt{15}\right)$
- (7) $(1, \sqrt{8}), (1, -\sqrt{8})$
- (8) $\left(\frac{p}{4}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{p}{4}, -\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$
- (9) $S_{OAB} = 300\sqrt{3}$ יח"ש
- (10) $S_{ABO} = 12\sqrt{3}p^2$ יח"ש
- (11) $S_{ABC} = 3\sqrt{3}p^2$ יח"ש
- (12) $S_{ABCF} = 40\frac{5}{8}$ יח"ש
- (13) $B\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ או $B\left(\frac{1}{4}, -1\right)$
- (14) $y = -2x$ או $y = 2x$
- (15) $y = 2x - 2$
- (16) $k = \frac{1}{2}$
- (17) $y = x + 1\frac{1}{2}, y = -x - 1\frac{1}{2}$.א
- (18) $B\left(6\frac{3}{4}, -9\right)$
- (19) $y = \frac{1}{2}x - 7\frac{7}{8}$
- (20) $y = x + 2$
- (21) $A\left(\frac{3}{2}p, \sqrt{3}p\right)$
- (22) הוכחה.
- (23) $7x + 3y - 7 = 0$
- (24) $y = -9x + 18$
- (25) $(x - 6)^2 + y^2 = 144$
- (26) $(x - 8)^2 + y^2 = 55$
- (27) $\left(x - 2\frac{1}{2}p\right)^2 + y^2 = 4p^2$
- (28) $\left(x - 1\frac{1}{4}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{25}{16}$
- (29) $C(p + 2, 0)$
- (30) $y^2 = 1\frac{1}{2}x$

כלים מתמטיים 96039

פרק 8 - גיאומטריה אנליטית - ההיפרבולה

תוכן העניינים

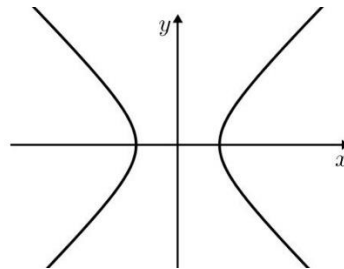
- 1. הגדרות יסודיות 93
- 2. הקשר בין הפרמטרים של היפרבולה 94
- 3. רדיוסים של היפרבולה 95
- 4. מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה 96
- 5. אסימפטוטות של היפרבולה 97

הגדרות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, שהפרש מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא היפרבולה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי ההיפרבולה.



- משוואת היפרבולה קנונית: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- היפרבולה שבה $a = b$, נקראת היפרבולה שוות שוקיים.
- הקשר בין הפרמטרים: $c^2 = a^2 + b^2$.

שאלות:

- (1) מצא את אורך צירי ההיפרבולה שמשוואתה $x^2 - 4y^2 = 36$.
- (2) מצא את משוואתה של ההיפרבולה שאורך צירה הממשי הוא 18 ואורך צירה המדומה הוא $2\sqrt{3}$.
- (3) מצא את משוואתה של היפרבולה שאורך צירה הממשי הוא 12 והמרחק בין מוקדיה הוא 20.

תשובות סופיות:

- (1) אורך הציר הממשי: 12, אורך הציר המדומה: 6.

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{3} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{80} = 1 \quad (3)$$

הקשר בין הפרמטרים של ההיפרבולה:

שאלות:

(4) מצא את משוואתה של ההיפרבולה שאורך צירה המדומה הוא $8\sqrt{5}$ והיא עוברת בנקודה $(-10, 3\sqrt{5})$.

(5) מצא משוואת ההיפרבולה שוות שוקיים שהמרחק בין מוקדיה הוא $\sqrt{200}$.

תשובות סופיות:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1 \quad (4)$$

$$x^2 - y^2 = 25 \quad (5)$$

רדיוסים של היפרבולה:

סיכום כללי:

רדיוסים באליפסה	רדיוסים בהיפרבולה
$r_1 = a - \frac{cx}{a}$	$r_1 = \left \frac{cx}{a} - a \right $
$r_2 = a + \frac{cx}{a}$	$r_2 = \left \frac{cx}{a} + a \right $

שאלות:

- (6) נתונה היפרבולה שמשוואתה: $6x^2 - y^2 = 18$. מצא על ההיפרבולה את הנקודות שמכפלת מרחקיהן מהמוקדים הוא 25.
- (7) נתונה היפרבולה שמשוואתה: $7x^2 - 9y^2 = 63$. מצא על ההיפרבולה את הנקודות שסכום ריבועי מרחקיהן מהמוקדים הוא $74\frac{8}{9}$.
- (8) נתונה היפרבולה שמשוואתה $4x^2 - y^2 = 20$. מצא נקודה על ההיפרבולה ברביע הרביעי שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.
- (9) נתונה היפרבולה שמשוואתה $5x^2 - 4y^2 = 80$. מנקודה A שעל ההיפרבולה ברביע הראשון העבירו ישר מקביל לציר ה- x , החותך את הענף השמאלי של ההיפרבולה בנקודה B. את נקודה A חיברו עם המוקד הימני F_1 של ההיפרבולה ואת הנקודה B חיברו עם המוקד השמאלי של ההיפרבולה F_2 . נתון כי היקף הטרפז F_1BAF_2 הוא 29 יחידות אורך. מצא את שיעורי הנקודה A.

תשובות סופיות:

- (6) $(\pm 2, \pm \sqrt{6})$
- (7) $\left(\pm 4, \pm 2\frac{1}{3} \right)$
- (8) $(3, -4)$
- (9) $\left(5, \frac{\sqrt[3]{5}}{2} \right)$

מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה:

סיכום כללי:

מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה, היא: $\frac{a^2}{b^2}$.

שאלות:

(10) נתונה היפרבולה שמשוואתה $4x^2 - 3y^2 = 24$. מצא את משוואתו של מיתר בהיפרבולה, שהנקודה $(3, 4)$ היא אמצעו.

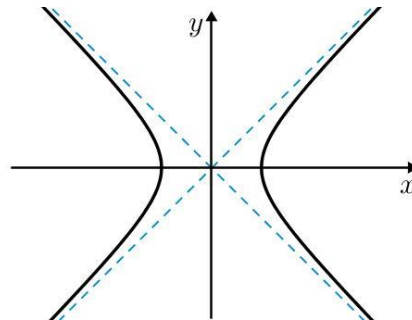
תשובות סופיות:

(10) $y = x + 1$

אסימפטוטות של היפרבולה:

סיכום כללי:

לכל היפרבולה יש שתי אסימפטוטות משופעות, שענפי ההיפרבולה שואפים אליהן.



- משוואות האסימפטוטות הן: $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$.

שאלות:

11 מצא את משוואת האסימפטוטות של היפרבולה שמשוואתה $4x^2 - y^2 = 48$.

12 הישר $y = -\frac{3}{4}x$ הוא אסימפטוטה של היפרבולה, שהמרחק בין מוקדיה הוא 20. מצא את משוואת ההיפרבולה.

13 נתונה היפרבולה שמשוואתה $9x^2 - 4y^2 = k$ ואורך צירה המדומה הוא 6. מצא נקודה על האסימפטוטה היורדת של ההיפרבולה ברביע הרביעי שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

14 ישר שעובר בנקודה $(-6, 8)$ הוא אסימפטוטה של היפרבולה שעוברת בנקודה $(9, -8\sqrt{2})$.
א. מצא את משוואת ההיפרבולה.
ב. מצא את מרחק אחד ממוקדי ההיפרבולה מאחת האסימפטוטות שלה.

15 מוקדיה של היפרבולה שעוברת בנקודה $(4, -1)$ מתלכדים עם מוקדיה של אליפסה שמשוואתה $16x^2 + 25y^2 = 400$. מצא נקודה על הענף השמאלי של ההיפרבולה, שמרחקה מהאסימפטוטה העולה של ההיפרבולה הוא $1\frac{1}{3}$.

תשובות סופיות:

$$y = 2x, y = -2x \quad (11)$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1 \quad (12)$$

$$(2, -3) \quad (13)$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{א.} \quad (14)$$

$$\text{ב. } d = 4$$

$$\left(-3, \frac{1}{\sqrt{8}}\right) \quad (15)$$

כלים מתמטיים 96039

פרק 9 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

99	1. משטחים במרחב.....
101	2. נספח – משטחים ממעלה שנייה.....

משטחים במרחב

שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

זהו ושרטטו את המשטחים הבאים :

$$z = 4x^2 + y^2 + 1 \quad \text{א.}$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \quad \text{ב.}$$

זהו כל אחד מהמשטחים הבאים :

$$25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100 \quad \text{א.}$$

$$25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0 \quad \text{ג.}$$

מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ לבין המשטח $z = 12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206 = 0$ (7)

א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$.

מצאו את החיתוך בין המשטחים $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$ ו- $x^2 + y^2 + z^2 = 64$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$ (9)

א. זהו את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

- 10 נתונים שני משטחים: $R: x^2 - y^2 + 2z^2 = 3$, $Q: 2x^2 - y^2 + z^2 = 3$.
- זהו את המשטחים ושרטטו אותם.
 - הראו כי החיתוך בין R ו- Q הוא שתי מסילות, כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.
 - המסילה C היא חלק של החיתוך בין R ל- Q . נתון כי $A(-2, -3, 2)$ היא נקודת התחלה של C ו- $B(-1, 0, 1)$ היא נקודת סיום של C . כתבו את C בצורה פרמטרית.
 - מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C .

• בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

תשובות סופיות

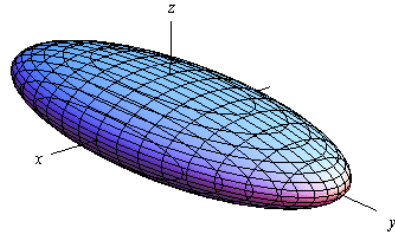
- אליפסואיד.
- פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
- היפרבולואיד חד יריעתי.
- א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 1)$ ונפתח כלפי מעלה.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 3)$ ונפתח כלפי מטה.
- א. אליפסואיד.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1, 2, 0)$ ונפתח כלפי מעלה.
ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 10)$.
- החיתוך הוא מעגל $x^2 + y^2 = 25$, שמרכזו בנקודה $(0, 0, 12)$.
- א. ספירה שמרכזה $(4, 1, -10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.
- נקודות החיתוך הן $A(7, 0, -12)$, $B\left(\frac{59}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9}\right)$.
- החיתוך הוא המעגל $x^2 + y^2 = 15$, שמרכזו בנקודה $(0, 0, 7)$.
- א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y .
ב. $\ell_1: (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$ $\ell_2: (x, y, z) = (3, 2t, t)$
- א. שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי. ב. $z = -x, z = x$. ג. $C: x = -\cosh t, y = \sqrt{3} \sinh t, z = \cosh t \quad \ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0$. ד. $\sqrt{2}$.

נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

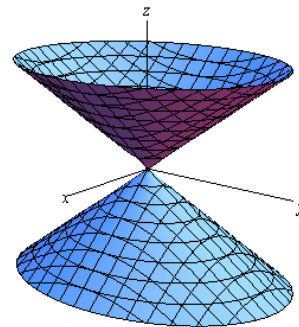
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות;
כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a = b = c$,
נקבל כדור עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

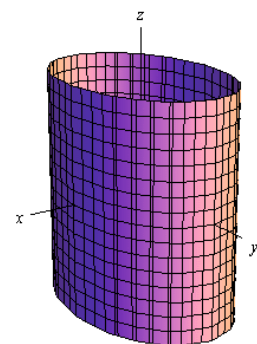
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית);
החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות.
החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו
הם היפרבולות.
* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע
לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים
במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו-
 yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים
מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא
 $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.
* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע
במשוואת הגליל.

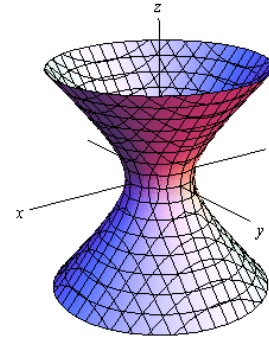


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

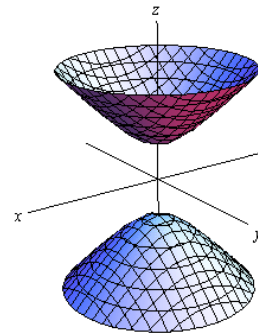
* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

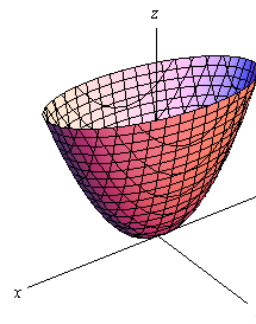
פרבולואיד אליפטי

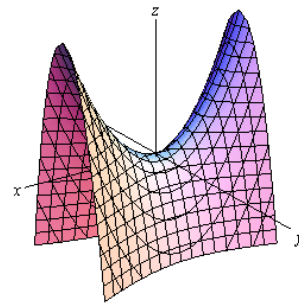
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



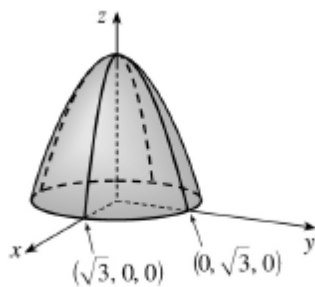
פרבולואיד היפרבולי

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

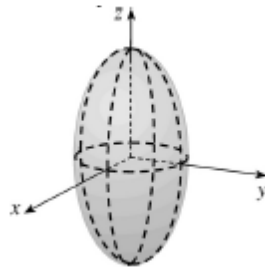
תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

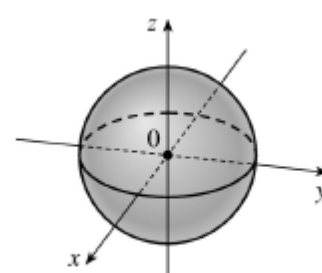
* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

דוגמאות שונות

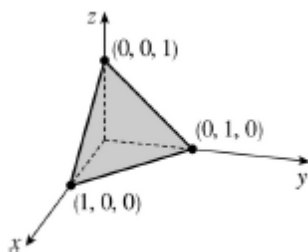
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



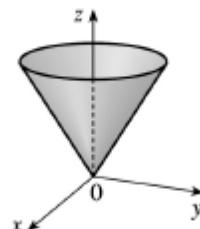
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



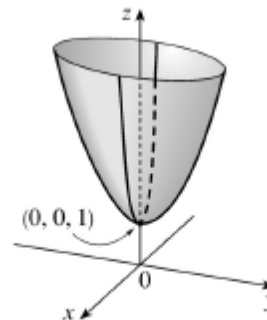
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$